

Conceptes matemàtics preliminars

Danilo Borges



danilo.borges@upc.edu



UNIVERSITAT POLITÈCNICA
DE CATALUNYA
BARCELONATECH

Teoria de l'elasticitat

Feb/2026

1. Vectors
2. Notació indicial (d'Einstein)
3. Tensors
4. Canvi de base
5. Camps tensorials

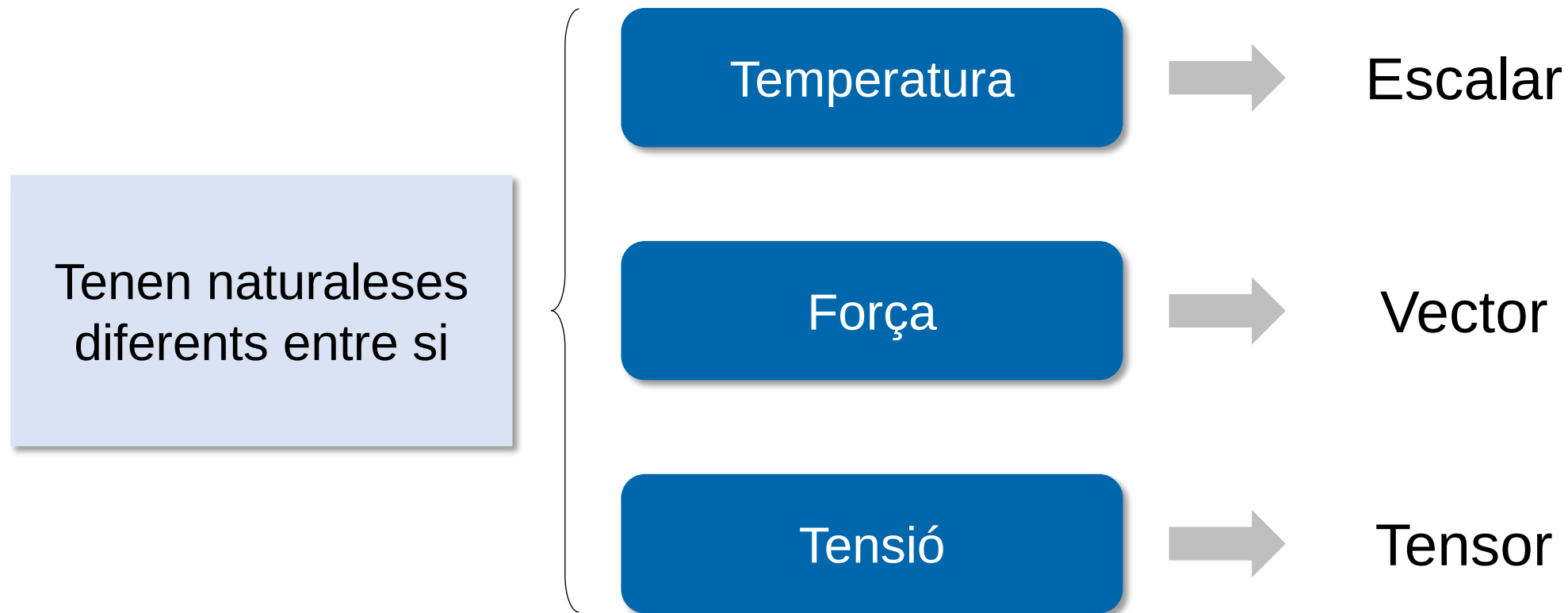
Conceptes matemàtics preliminars



Operacions vectorials



Entitat matemàtica utilitzada en la representació:



- Elements d'un conjunt anomenat espai vectorial;
- Han de permetre l'execució de dues operacions:

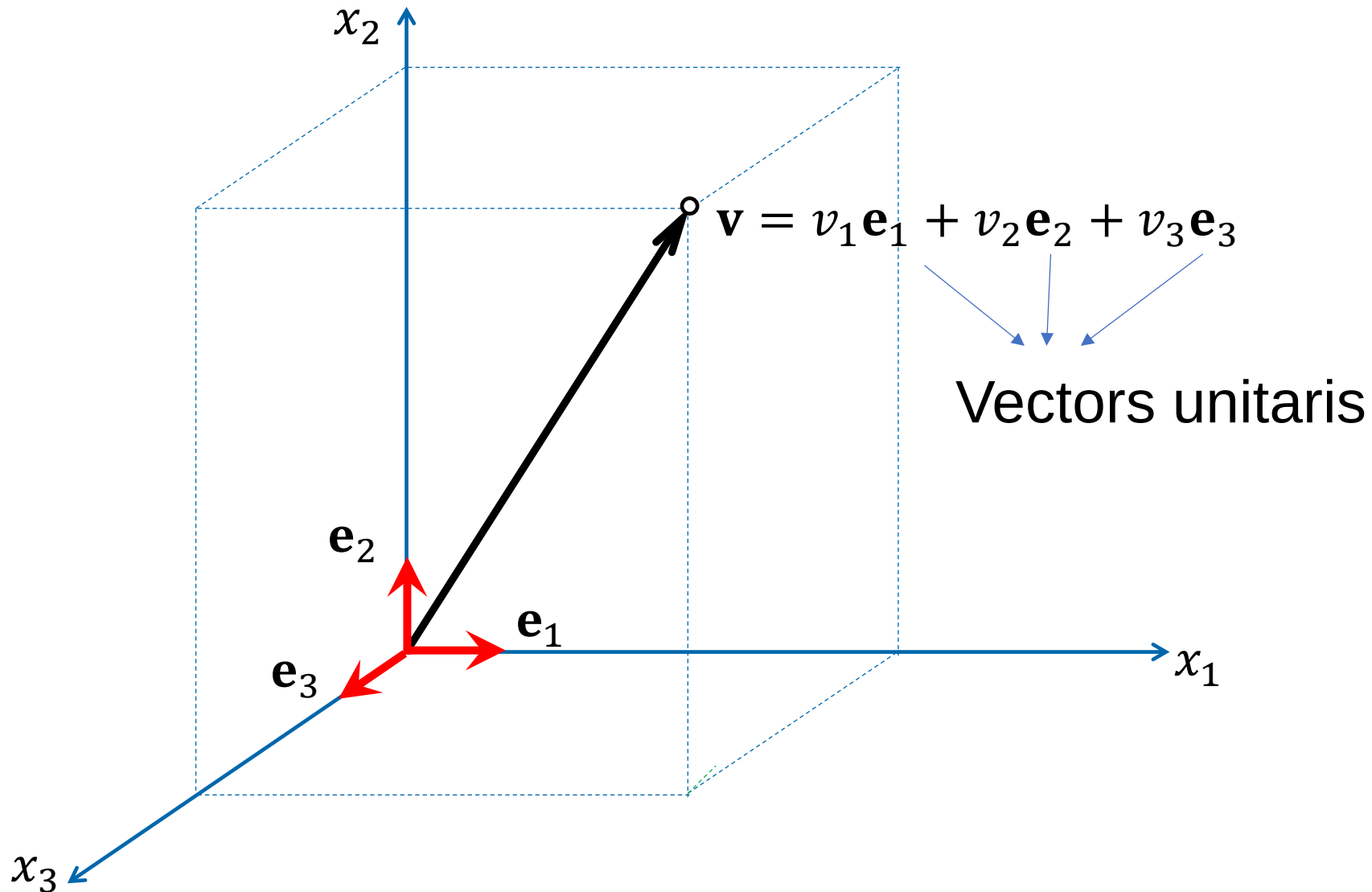
Suma vectorial:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{w}$$

Producte per un nombre real:

$$c \mathbf{a} = \mathbf{b}$$

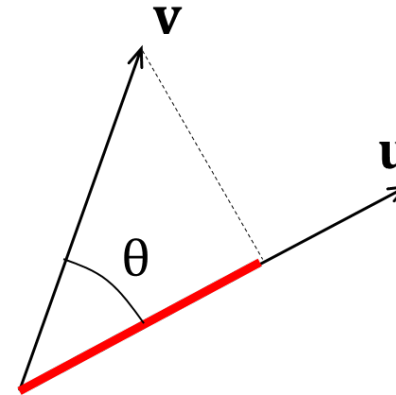
- Es representen amb lletres minúscules en negreta;
- Escalars: lletres minúscules en cursiva;
- Matrius i tensors: lletres majúscules en negreta.



Definició:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta = c$$

Interpretació geomètrica



Correspon a la
projecció del vector
 $\mathbf{u}$ sobre el vector $\mathbf{v}$,
o viceversa

Propietats:

Commutativitat

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = c$$

Distributivitat

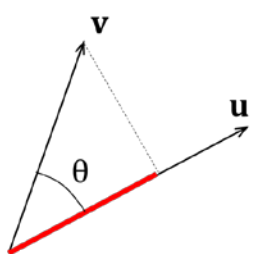
$$(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = a(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) + b(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$$

Positivitat

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} > 0, \text{ per a qualsevol } \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$$

Producte escalar en una base ortogonal

Mitjançant el producte escalar:


$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta = c \quad \theta = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \left(\frac{\pi}{2} \right) = 0$$

Expressant el vector en funció de les components en una base ortonormal:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3) \cdot (v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$$

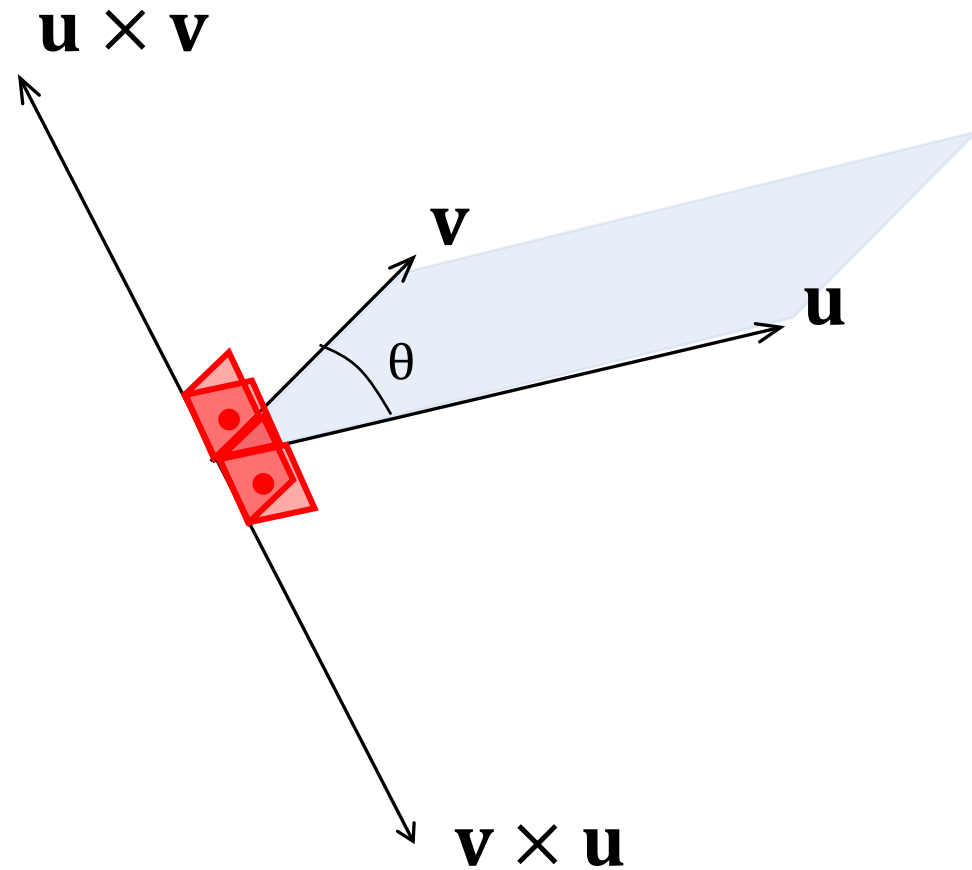
$$= u_1 v_1 (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1) + u_1 v_2 (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) + u_1 v_3 (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3) + u_2 v_1 (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1) + u_2 v_2 (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2) + u_2 v_3 (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3) \\ + u_3 v_1 (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1) + u_3 v_2 (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2) + u_3 v_3 (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

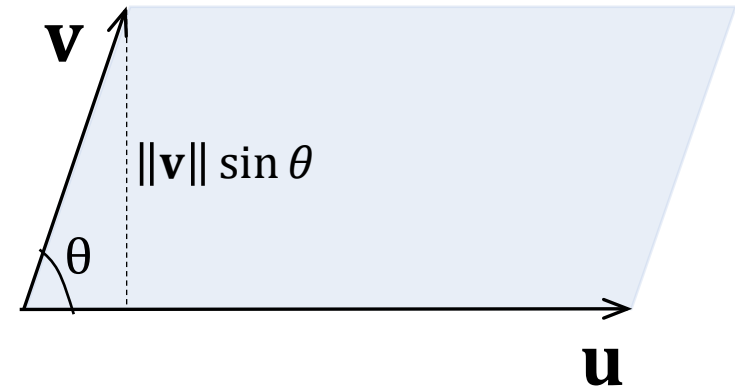
$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$



$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = \mathbf{u}^T \mathbf{v}$$

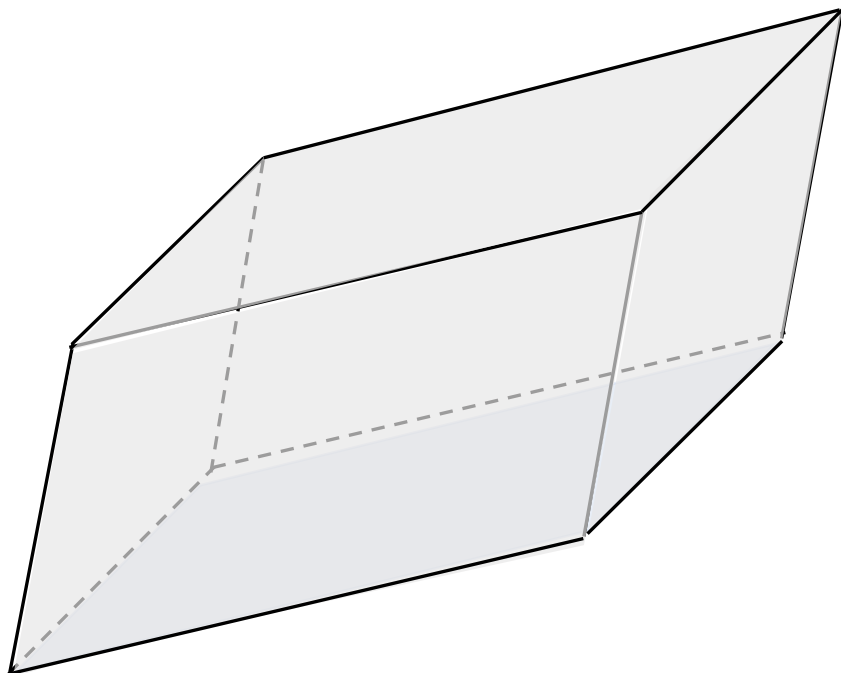


$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin \theta = \text{Àrea del paral·lelogram}$$



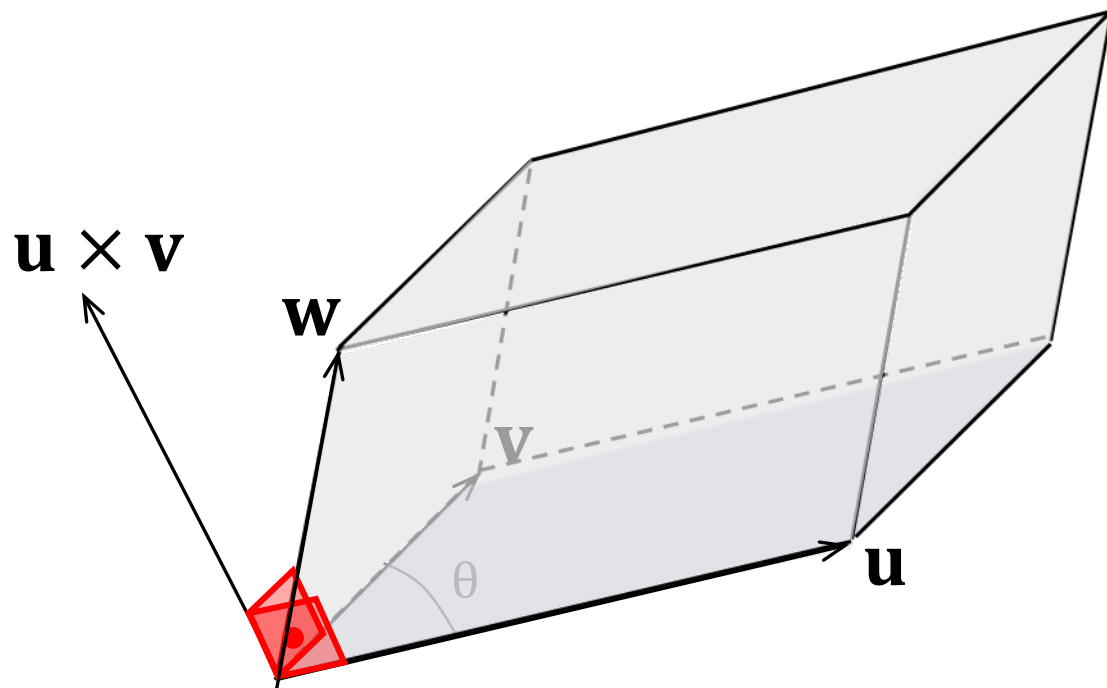
$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Volum d'un paral·lelepípede



$$\text{Volum} = \text{Àrea del paral·lelogram} * \text{Altura}$$

Volum d'un paral·lelepípede



$$\text{Volum} = \text{Àrea del paral·lelogram} * \text{Altura}$$

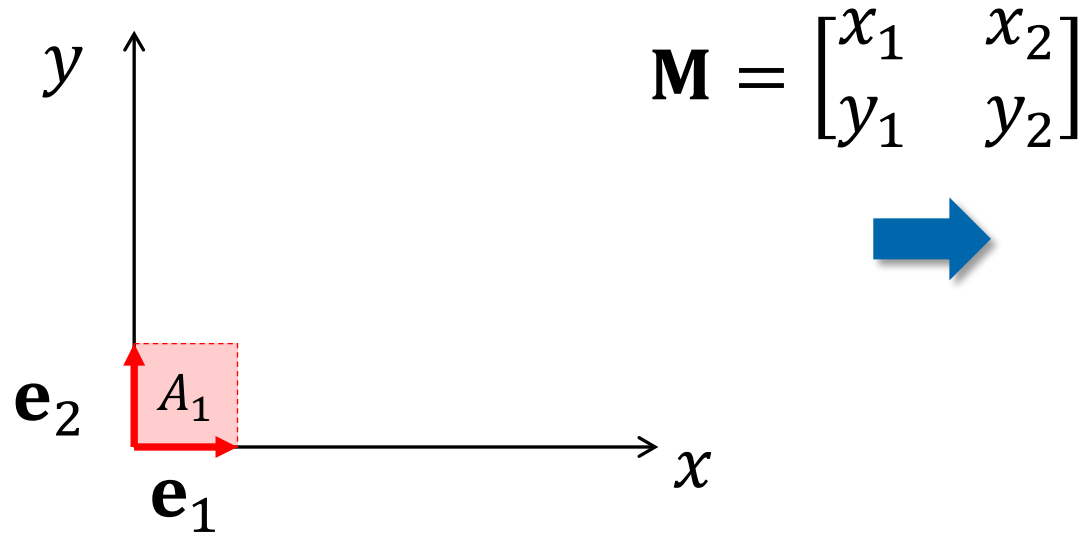
$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 7 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 20 & 28 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 15 & 21 & 3 \end{bmatrix}$$

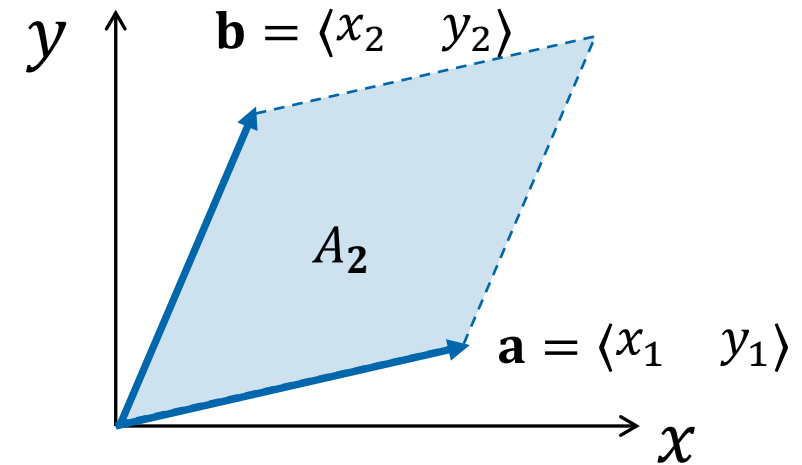
$$\mathbf{A} \mathbf{x} =$$

$$(\mathbf{u} \mathbf{v}^T) \mathbf{x} =$$



$$\mathbf{e}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{e}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$



$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{Bmatrix}$$

Aquest producte entre vectors dona lloc a una nova entitat matemàtica, anomenada **tensor**.

Si fem:

$$\mathbf{v} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}) = c\mathbf{a} \quad \rightarrow \quad \text{Vector en la direcció d'\mathbf{a}, amb mòdul dependent del producte escalar entre \mathbf{b} i \mathbf{u}}$$

Aquesta expressió transforma el vector $\mathbf{u}$ en el vector $\mathbf{v}$. S'observa que l'operació és lineal respecte dels vectors $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{v} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot (c\mathbf{u} + d\mathbf{v})) = c\mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}) + d\mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{v})$$

Els vectors $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ defineixen l'operació d'un tensor.

Un **tensor** és, per definició, una entitat (un operador) que produeix una **transformació lineal** sobre vectors, transformant-los en vectors diferents.

$$\mathbf{v} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{u})$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{A} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$$



El producte tensorial entre vectors dona lloc a un tensor.

$$\mathbf{v} = \mathbf{A} \mathbf{u} = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \mathbf{u} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{u})$$

Considerant una base cartesiana:

$$\mathbf{v} = \mathbf{A} \mathbf{u} = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \mathbf{u} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{a} \mathbf{b}^T \mathbf{u}$$

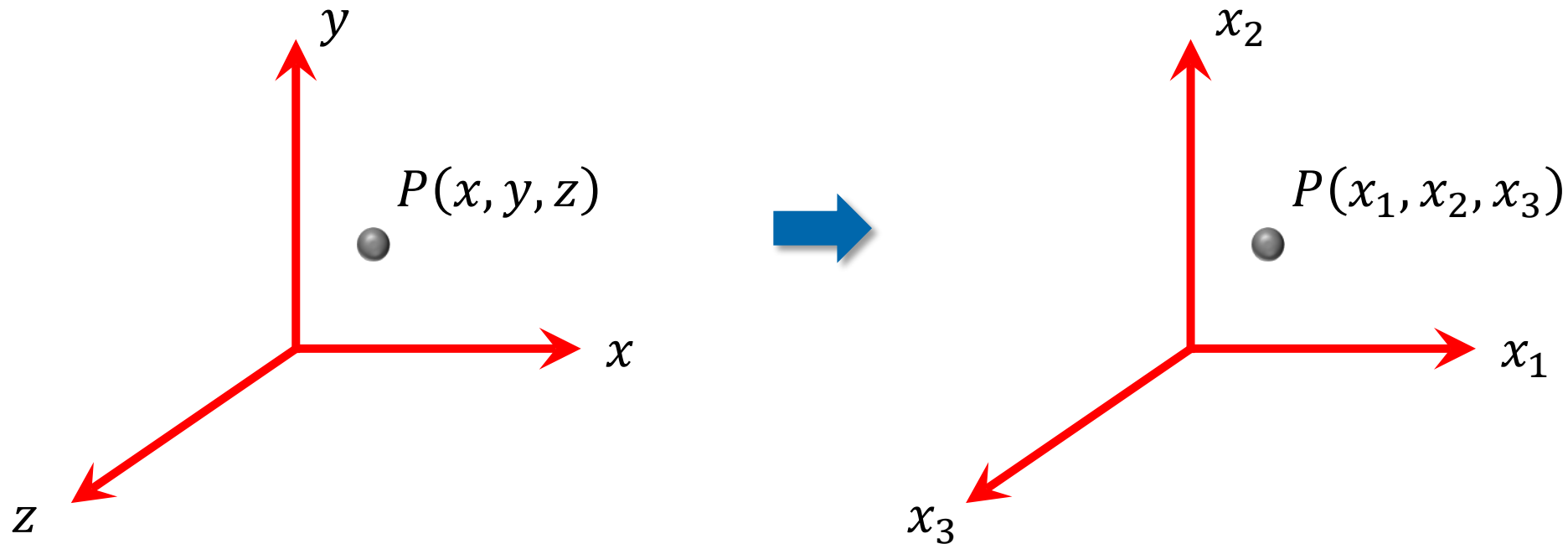
$$\mathbf{v} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \{b_1 \quad b_2 \quad b_3\} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix}$$

Conceptes matemàtics preliminars



Notació indicial



- L'interval de variació és un conjunt de nombres enters de l'1 a l' n .
- En mecànica, habitualment, n és 1, 2 o 3.

$$\begin{cases} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \cdots + A_{1n}x_n = b_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \cdots + A_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ A_{n1}x_1 + A_{n2}x_2 + \cdots + A_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$



Convenció de repetició
(s'introdueix l'índex lliure i)

$$A_{i1}x_1 + A_{i2}x_2 + \cdots + A_{in}x_n = b_i$$

Es pot condensar introduint
l'operador de sumatori.



$$\sum_{j=1}^n A_{ij}x_j = b_i$$



Convenció de suma
(índex repetit j)

$$A_{ij}x_j = b_i$$

Com es pot
representar $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$
amb notació
indicial?



$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases}$$



I com es pot
representar en forma
matricial?

Exemplos de aplicação:

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}$$

$$\frac{\partial A_{ij}}{\partial A_{kl}} = \delta_{ik} \delta_{jl}$$

$$a_i \delta_{ij} = a_j$$

Operador de
permutação

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{se } (i, j, k) \text{ é } (1, 2, 3) \text{ ou } (2, 3, 1) \text{ ou } (3, 1, 2) \\ -1 & \text{se } (i, j, k) \text{ é } (3, 2, 1) \text{ ou } (1, 3, 2) \text{ ou } (2, 1, 3) \\ 0 & \text{se } i = j \text{ ou } j = k \text{ ou } k = i \end{cases}$$

$$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik} = \varepsilon_{jki}$$

Considereu que els índexs varien de l'1 al 3.

a) $\delta_{ii} =$

b) $\delta_{ij} u_i =$

c) $\delta_{ij} A_{jk} =$

d) $\delta_{ij} \delta_{jk} =$

e) $\delta_{ij} \delta_{ij} =$

Operador de permutació (Levi-Civita)



$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si } (i, j, k) \text{ és } (1,2,3) \text{ o } (2,3,1) \text{ o } (3,1,2) \\ -1 & \text{si } (i, j, k) \text{ és } (3,2,1) \text{ o } (1,3,2) \text{ o } (2,1,3) \\ 0 & \text{si } i = j, \text{ o } j = k, \text{ o } k = i \end{cases}$$

a) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} =$

Conceptes matemàtics preliminars



Tensors

Components d'un tensor

Donada una base ortonormal, les components d'un tensor arbitrari $\mathbf{A}$ (A_{ij}) s'obtenen fent:

$$A_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{A} \mathbf{e}_j$$

Exemple:

$$A_{23} = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{A} \mathbf{e}_3 = \{0 \quad 1 \quad 0\} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$A_{23} = \{0 \quad 1 \quad 0\} \begin{Bmatrix} A_{13} \\ A_{23} \\ A_{33} \end{Bmatrix} = A_{23}$$

$$\mathbf{A} = A_{ij}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 A_{ij}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)$$

$$\mathbf{A} = A_{11}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1) + A_{12}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2) + \cdots + A_{33}(\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3)$$

$$\mathbf{A} = A_{11} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \{1 \quad 0 \quad 0\} + A_{12} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \{0 \quad 1 \quad 0\} + \cdots + A_{33} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \{0 \quad 0 \quad 1\}$$

$$\mathbf{A} = A_{11} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + A_{12} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \cdots + A_{33} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Suma de tensors

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{C} \quad \Rightarrow \quad A_{ij} = B_{ij} + C_{ij}$$

Tensor aplicat sobre un vector

$$\mathbf{v} = \mathbf{B} \mathbf{u} \quad \Rightarrow \quad v_i = \sum_{j=1}^3 B_{ij} u_j$$

Transposició d'un tensor:

$$\mathbf{A} = A_{ij} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^T = A_{ji}$$

Producte escalar
(doble contracció)

$$\alpha = \mathbf{A} : \mathbf{B} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 A_{ij} B_{ij}$$

Producte entre tensors:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad C_{ij} = \sum_{k=1}^3 A_{ik} B_{kj}$$

$$\text{tr } \mathbf{A} = \sum_{i=1}^3 A_{ii}$$

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = \text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{B} \mathbf{A}^T) = \text{tr}(\mathbf{B}^T \mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{A} \mathbf{B}^T)$$

$$\mathbf{A} \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{13}b_{13} & a_{11}b_{21} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{23} & a_{11}b_{31} + a_{12}b_{32} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{12} + a_{23}b_{13} & a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{23} & a_{21}b_{31} + a_{22}b_{32} + a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{12} + a_{33}b_{13} & a_{31}b_{21} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{23} & a_{31}b_{31} + a_{32}b_{32} + a_{33}b_{33} \end{bmatrix}$$

a) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} =$

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$

$$(c\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{c}\mathbf{A}^{-1}$$

$$\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}$$

$$(\mathbf{A}^{\top})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{\top}$$

Multiplicació de matrius

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ b_{41} \\ b_{51} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} \end{bmatrix}$$

La multiplicació de matrius es pot entendre com el càlcul de diversos productes escalars, on els vectors queden definits per les files i les columnes de les matrius.

Exemple:

$$\left. \begin{aligned} c_{11} &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + a_{14}b_{41} + a_{15}b_{51} \\ \mathbf{a}_1^T &= \langle a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \quad a_{14} \quad a_{15} \rangle \\ \mathbf{b}^1 &= \langle b_{11} \quad b_{21} \quad b_{31} \quad b_{41} \quad b_{51} \rangle \end{aligned} \right\} c_{11} = \mathbf{a}_1^T \mathbf{b}^1 = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}^1$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} = \langle \mathbf{a}^1 \quad \mathbf{a}^2 \quad \mathbf{a}^3 \quad \mathbf{a}^4 \quad \mathbf{a}^5 \rangle$$

Si les columnes d' $\mathbf{A}$ són **ortogonals**: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos 0 \rightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} \mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{a}^1 = b_{11} & \mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{a}^2 = b_{12} = 0 \\ \mathbf{a}^2 \cdot \mathbf{a}^1 = b_{21} = 0 & \mathbf{a}^2 \cdot \mathbf{a}^2 = b_{22} \quad \dots \\ \mathbf{a}^3 \cdot \mathbf{a}^1 = b_{31} = 0 & \mathbf{a}^3 \cdot \mathbf{a}^2 = b_{32} = 0 \\ & \dots \end{array}$$

$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{D}$ sent $\mathbf{D}$ una matriu diagonal

Matrius ortogonals

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} = \langle \mathbf{a}^1 \quad \mathbf{a}^2 \quad \mathbf{a}^3 \quad \mathbf{a}^4 \quad \mathbf{a}^5 \rangle$$

Si les columnes d' $\mathbf{A}$ són **ortonormals** (ortogonals i de norma unitària):

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} & a_{51} \\ a_{13} & a_{22} & a_{32} & a_{42} & a_{52} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{42} & a_{53} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & a_{54} \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & a_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} \mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{a}^1 = b_{11} = 1 & \mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{a}^2 = b_{12} = 0 \\ \mathbf{a}^2 \cdot \mathbf{a}^1 = b_{21} = 0 & \mathbf{a}^2 \cdot \mathbf{a}^2 = b_{22} = 1 \quad \dots \\ \mathbf{a}^3 \cdot \mathbf{a}^1 = b_{31} = 0 & \mathbf{a}^3 \cdot \mathbf{a}^2 = b_{32} = 0 \\ \dots & \dots \end{array}$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I} \quad \text{sent } \mathbf{I} \text{ la matriu identitat}$$

Tensor simètric:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T \quad \Rightarrow \quad A_{ij} = A_{ji}$$

Tensor antisimètric:

$$\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T \quad \Rightarrow \quad A_{ij} = -A_{ji}$$

Tot tensor $\mathbf{M}$ es pot descompondre unívocament, de manera additiva, en un tensor simètric i en un altre d'antisimètric:

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{M} + \mathbf{M}^T}{2} + \frac{\mathbf{M} - \mathbf{M}^T}{2} = \mathbf{S} + \mathbf{A}$$

La doble contracció d'un tensor simètric amb un d'antisimètric és nul·la:

$$\mathbf{S} : \mathbf{A} = 0$$

La doble contracció d'un tensor simètric amb un tensor arbitrari és:

$$\mathbf{S} : \mathbf{M} = \mathbf{S} : (\mathbf{M}^s + \mathbf{M}^a) = \mathbf{S} : \mathbf{M}^s + \cancel{\mathbf{S} : \mathbf{M}^a}^0$$

$$\mathbf{S} : \mathbf{M} = \mathbf{S} : \mathbf{M}^s$$

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$$

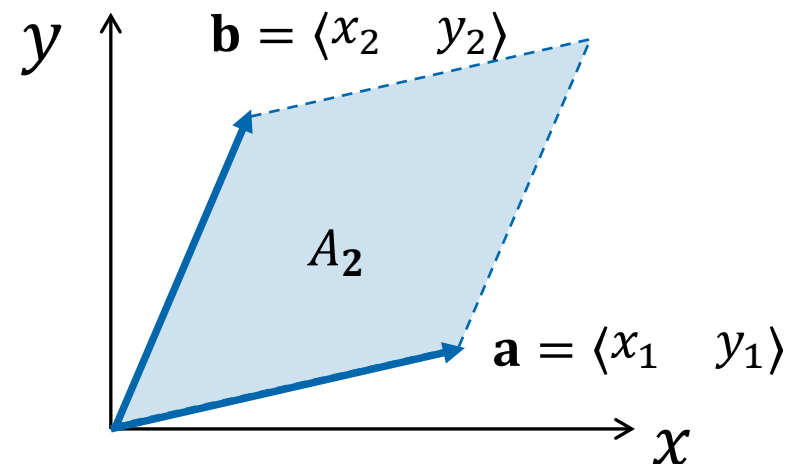
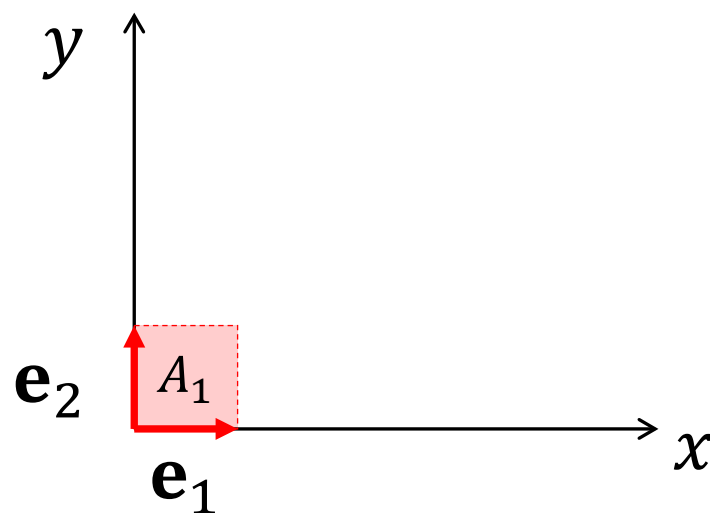
$$\det(\mathbf{AB}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}$$

$$\det \mathbf{A}^T = \det \mathbf{A}$$

$$\det \mathbf{A} = 0 \longrightarrow \mathbf{A} \text{ és singular}$$

Determinants: interpretació geomètrica

Considereu una matriu (tensor de 2n ordre) com una transformació lineal:



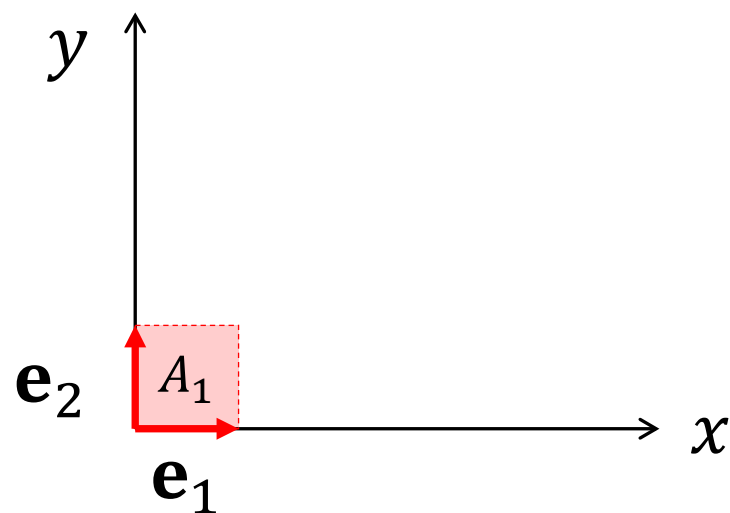
$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix}$$



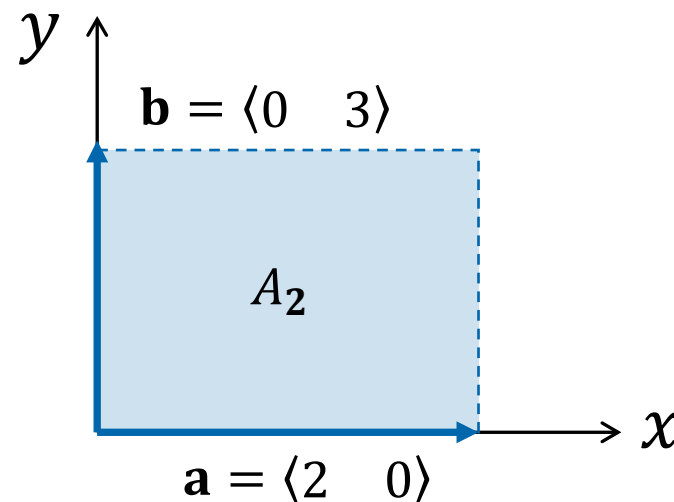
$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{Bmatrix}$$

Exemple

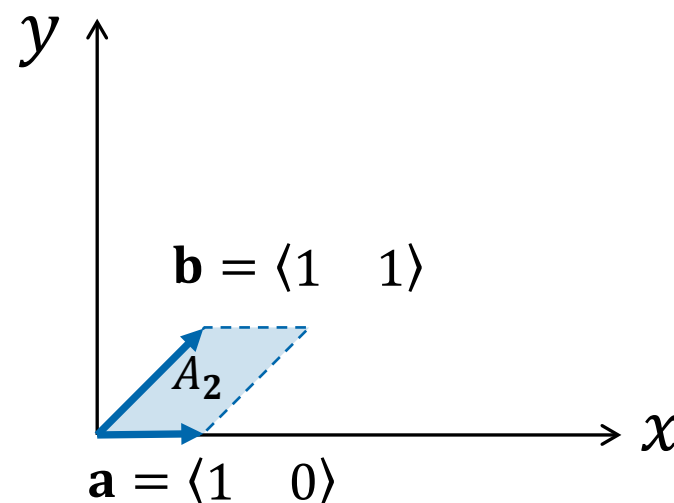


$\mathbf{M}$



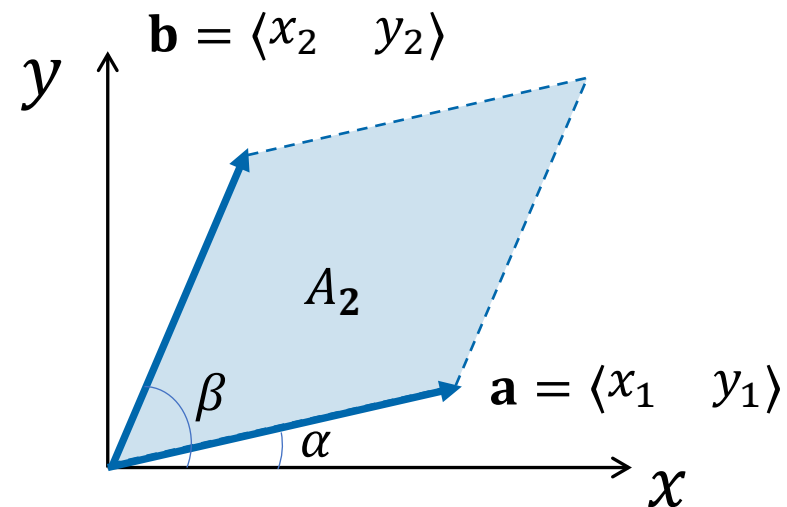
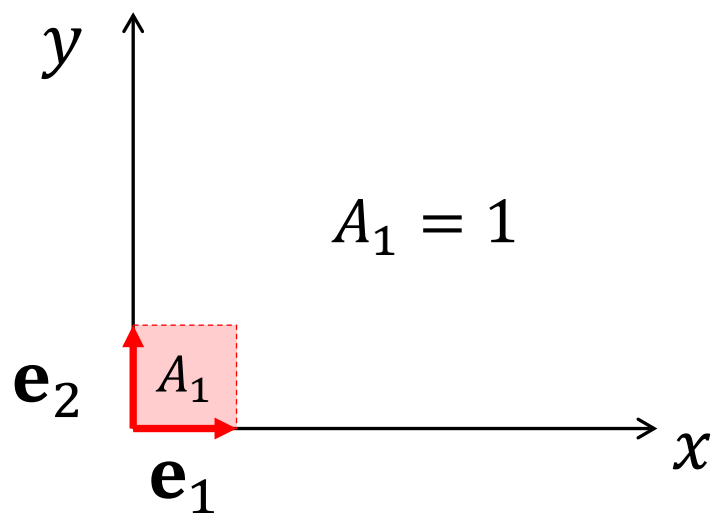
$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = 6A_1$$



$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = 1A_1$$



$$\mathbf{a} = \langle \|\mathbf{a}\| \cos(\alpha) \quad \|\mathbf{a}\| \sin(\alpha) \rangle$$

$$\mathbf{b} = \langle \|\mathbf{b}\| \cos(\beta) \quad \|\mathbf{b}\| \sin(\beta) \rangle$$

$$A_2 = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin(\beta - \alpha) = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| (\sin(\beta) \cos(\alpha) - \sin(\alpha) \cos(\beta))$$

$$A_2 = \|\mathbf{a}\| \cos(\alpha) \|\mathbf{b}\| \sin(\beta) - \|\mathbf{a}\| \sin(\alpha) \|\mathbf{b}\| \cos(\beta)$$

$$A_2 = x_1 y_2 - x_2 y_1 = \det(\mathbf{M}) A_1$$

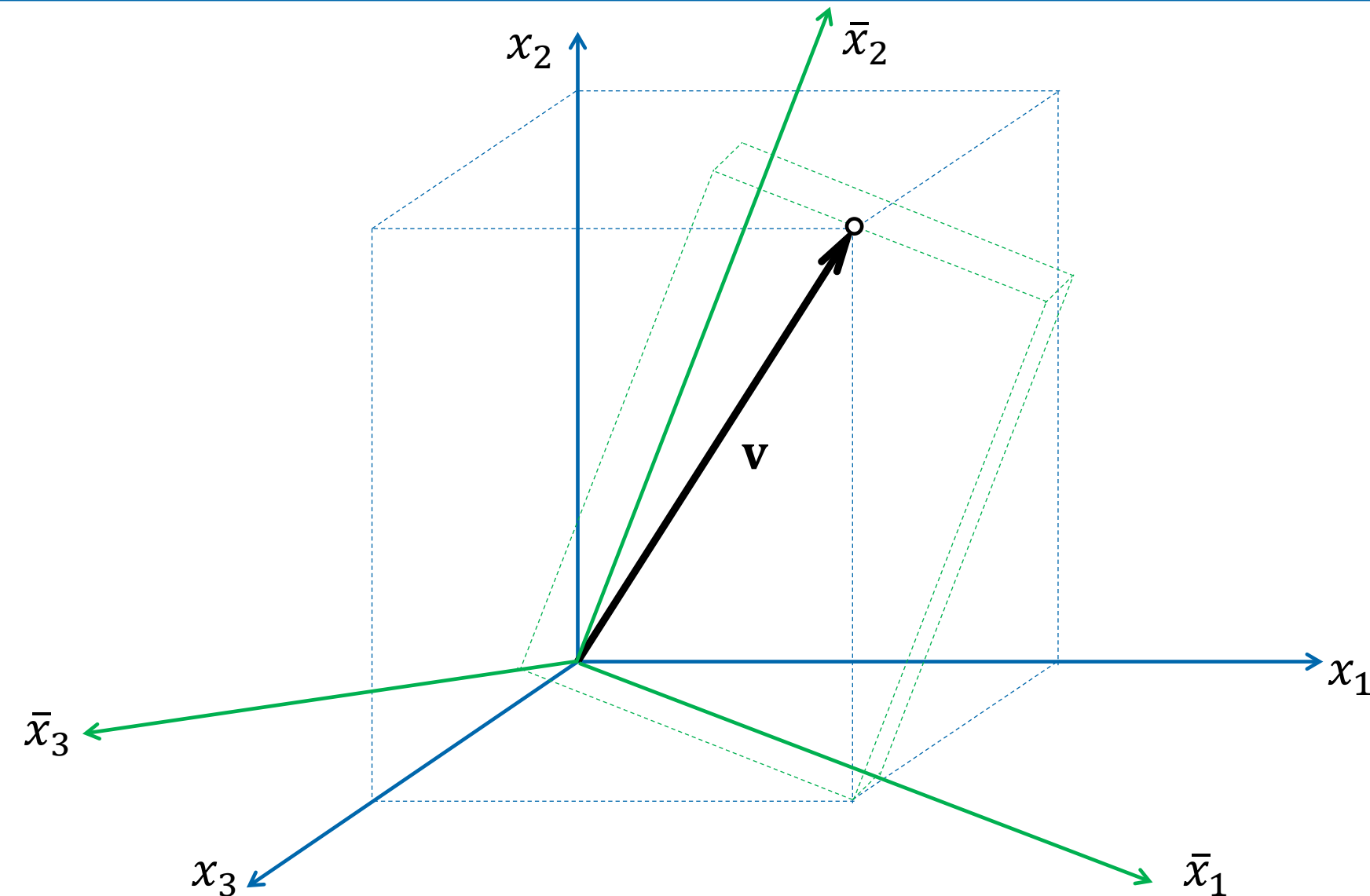
El determinant d'una transformació lineal dona el **factor d'escala** de l'àrea formada pels vectors unitaris.

Conceptes matemàtics preliminars



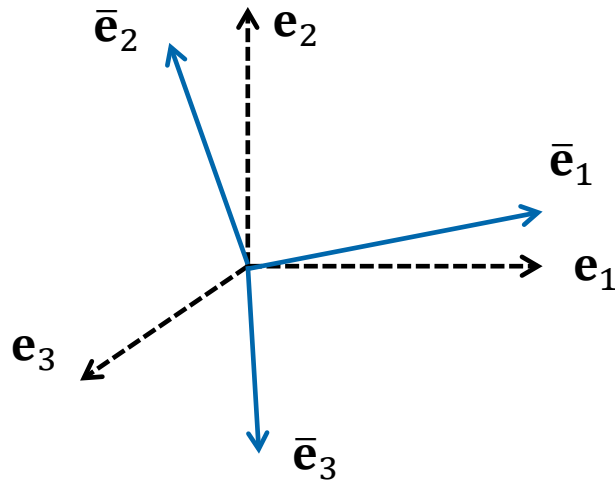
Canvi de base

Vector en diferents bases



- El vector no canvia, independentment de la base utilitzada.
- El que canvia són les seves components.

Relació entre les bases vectorials



$$\bar{\mathbf{e}}_1 = (\bar{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{e}_1) \mathbf{e}_1 + (\bar{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{e}_2) \mathbf{e}_2 + (\bar{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{e}_3) \mathbf{e}_3$$

$$\bar{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{e}_j = \|\bar{\mathbf{e}}_i\| \|\mathbf{e}_j\| \cos(\bar{\mathbf{e}}_i, \mathbf{e}_j)$$
$$\bar{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{e}_j = \cos(\bar{\mathbf{e}}_i, \mathbf{e}_j)$$

$$\bar{\mathbf{e}}_1 = Q_{11} \mathbf{e}_1 + Q_{12} \mathbf{e}_2 + Q_{13} \mathbf{e}_3$$

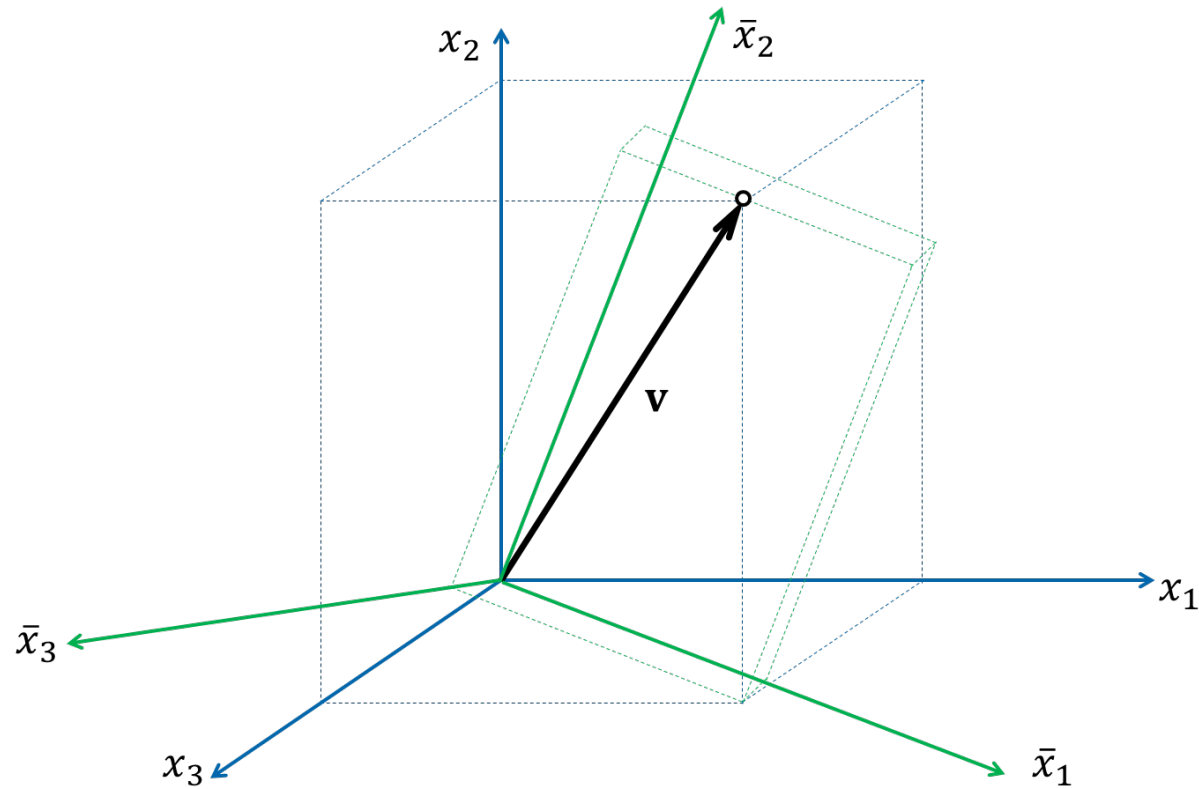
$$\bar{\mathbf{e}}_2 = Q_{21} \mathbf{e}_1 + Q_{22} \mathbf{e}_2 + Q_{23} \mathbf{e}_3$$

$$\bar{\mathbf{e}}_3 = Q_{31} \mathbf{e}_1 + Q_{32} \mathbf{e}_2 + Q_{33} \mathbf{e}_3$$

$$\Rightarrow \bar{\mathbf{e}}_p = Q_{pi} \mathbf{e}_i$$

$$\mathbf{e}_i = ? \bar{\mathbf{e}}_p$$





$$\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i = \bar{v}_p \bar{\mathbf{e}}_p$$

$$\bar{v}_p \bar{\mathbf{e}}_p = \bar{v}_p \underbrace{Q_{pi}}_{v_i} \mathbf{e}_i$$

$$v_i = Q_{pi} \bar{v}_p \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = \mathbf{Q}^T \bar{\mathbf{v}}$$

$$\bar{v}_p = Q_{pi} v_i \quad \Rightarrow \quad \bar{\mathbf{v}} = \mathbf{Q} \mathbf{v}$$

S'observa a continuació que les components d'un tensor canvien segons la base vectorial adoptada. Tanmateix, **el tensor en si és independent de la base** respecte de la qual s'han definit les seves components.

$$\mathbf{A} = A_{ij}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = \bar{A}_{pq}(\bar{\mathbf{e}}_p \otimes \bar{\mathbf{e}}_q)$$

$$\mathbf{A} = \bar{A}_{pq} \left((Q_{pi} \mathbf{e}_i) \otimes (Q_{qj} \mathbf{e}_j) \right)$$

$$A_{ij} = \bar{A}_{pq} Q_{pi} Q_{qj}$$

$$\mathbf{A} = \underbrace{\bar{A}_{pq} Q_{pi} Q_{qj}}_{A_{ij}} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}^\top \bar{\mathbf{A}} \mathbf{Q}$$

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{Q} \mathbf{A} \mathbf{Q}^\top$$

Una rotació d'un vector no en modifica la norma. :

$$\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{Q} \mathbf{v}$$

$$\|\bar{\mathbf{v}}\| = \|\mathbf{v}\|$$

$$\bar{\mathbf{v}}^T \bar{\mathbf{v}} = \mathbf{v}^T \mathbf{v}$$

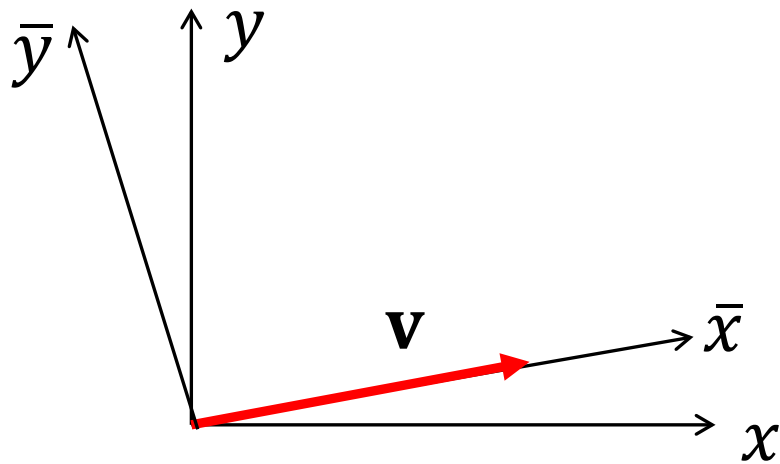
$$(\mathbf{Q} \mathbf{v})^T \mathbf{Q} \mathbf{v} = \mathbf{v}^T \mathbf{v}$$

$$\mathbf{v}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \mathbf{v} = \mathbf{v}^T \mathbf{v}$$

$$\mathbf{v}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \mathbf{v} = \mathbf{v}^T \mathbf{I} \mathbf{v}$$



$$\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I}$$



La matriu de rotació és una matriu ortogonal

Conceptes matemàtics preliminars



Camps tensorials



- Cada punt/partícula d'un cos està associat a una magnitud física; per tant, admetem que aquesta magnitud és funció del punt material, és a dir, varia d'un punt a un altre.
- Aleshores tindrem:

Funcions escalars

$$\alpha(\mathbf{x}, t) = \alpha(x_1, x_2, x_3, t)$$

Funcions vectorials

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \begin{Bmatrix} v_1(\mathbf{x}, t) \\ v_2(\mathbf{x}, t) \\ v_3(\mathbf{x}, t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_1(x_1, x_2, x_3, t) \\ v_2(x_1, x_2, x_3, t) \\ v_3(x_1, x_2, x_3, t) \end{Bmatrix}$$

Funcions tensorials

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}(x_1, x_2, x_3, t)$$

Funcions escalars

$$\alpha(\mathbf{x}, t) = \alpha(x_1, x_2, x_3, t) = \alpha(x_i, t)$$

Notació per a derivades

$$\frac{\partial \alpha(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_i} = \partial_i \alpha(x_j, t) = \alpha_{,i}(x_j, t)$$

Operador nabla

$$\nabla(\) = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{array} \right\} = \frac{\partial (\)}{\partial x_i} \mathbf{e}_i$$

Divergència

$$\operatorname{div} (\quad) = \nabla \cdot (\quad) = \frac{\partial (\quad)}{\partial x_i} \cdot \mathbf{e}_i$$

Rotacional

$$\operatorname{rot} (\quad) = \nabla \times (\quad) = \mathbf{e}_i \times \frac{\partial (\quad)}{\partial x_i}$$

Laplacià

$$\nabla^2 (\quad) = \nabla \cdot \nabla (\quad) = \frac{\partial^2 (\quad)}{\partial x_i \partial x_i}$$

Hessiana

$$\nabla \nabla (\quad) = \nabla \otimes \nabla (\quad) = \frac{\partial^2 (\quad)}{\partial x_i \partial x_j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$$

Gradient: $\nabla(\quad) = \frac{\partial(\quad)}{\partial x_i} \mathbf{e}_i$

Funcions escalars

$$\nabla g(\mathbf{x}) = \begin{Bmatrix} g_{,1} \\ g_{,2} \\ g_{,3} \end{Bmatrix}$$

Funcions vectorials

$$\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ u_{2,1} & u_{2,2} & u_{2,3} \\ u_{3,1} & u_{3,2} & u_{3,3} \end{bmatrix}$$

Funcions tensorials

$$\nabla \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \nabla \otimes \mathbf{A}(\mathbf{x})$$

$$\nabla \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k$$

Rotacional:

$$\text{rot}(\mathbf{u}) = \nabla \times (\mathbf{u}) = \mathbf{e}_i \times \frac{\partial (u_j \mathbf{e}_j)}{\partial x_i} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_k$$

Funcions vectorials

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial (u_j \mathbf{e}_j)}{\partial x_i} \cdot \mathbf{e}_i = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \delta_{ij} = u_{1,1} + u_{2,2} + u_{3,3}$$

Funcions tensorials

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial (A_{ik} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k)}{\partial x_j} \cdot \mathbf{e}_j = \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_j} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k) \cdot \mathbf{e}_j = \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j} \mathbf{e}_i = \begin{cases} A_{11,1} + A_{12,2} + A_{13,3} \\ A_{21,1} + A_{22,2} + A_{23,3} \\ A_{31,1} + A_{32,2} + A_{33,3} \end{cases}$$



Fixeu-vos que la divergència d'un vector és un escalar, i la divergència d'un tensor és un vector.

Divergència d'un producte

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_{11}u_1 + A_{12}u_2 + A_{13}u_3 \\ A_{21}u_1 + A_{22}u_2 + A_{23}u_3 \\ A_{31}u_1 + A_{32}u_2 + A_{33}u_3 \end{Bmatrix}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A}\mathbf{u}) = \frac{\partial}{\partial x_1} (A_{11}u_1 + A_{12}u_2 + A_{13}u_3) + \frac{\partial}{\partial x_2} (A_{21}u_1 + A_{22}u_2 + A_{23}u_3) + \frac{\partial}{\partial x_3} (A_{31}u_1 + A_{32}u_2 + A_{33}u_3)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A}\mathbf{u})$$

$$= A_{11,1}u_1 + A_{11}u_{1,1} + A_{12,1}u_2 + A_{12}u_{2,1} + A_{13,1}u_3 + A_{13}u_{3,1} + A_{21,2}u_1 + A_{21}u_{1,2} + A_{22,2}u_2 + A_{22}u_{2,2} \\ + A_{23,2}u_3 + A_{23}u_{3,2} + A_{31,3}u_1 + A_{31}u_{1,3} + A_{32,3}u_2 + A_{32}u_{2,3} + A_{33,3}u_3 + A_{33}u_{3,3}$$

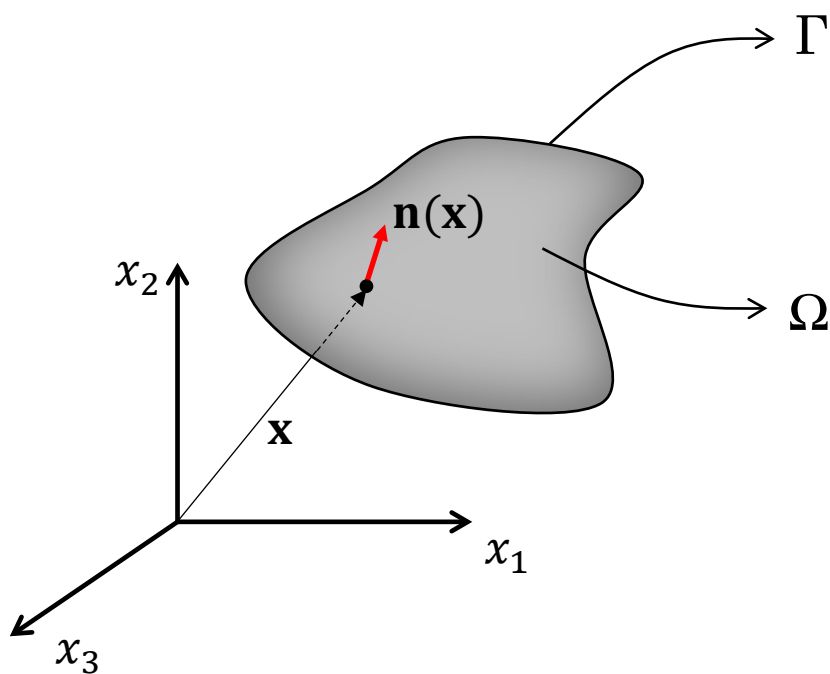
$$\nabla \cdot (\mathbf{A}\mathbf{u})$$

$$= (A_{11,1} + A_{21,2} + A_{31,3})u_1 + (A_{12,1} + A_{22,2} + A_{32,3})u_2 + (A_{13,1} + A_{23,2} + A_{33,3})u_3 + A_{11}u_{1,1} + A_{12}u_{2,1} \\ + A_{13}u_{3,1} + A_{21}u_{1,2} + A_{22}u_{2,2} + A_{23}u_{3,2} + A_{31}u_{1,3} + A_{32}u_{2,3} + A_{33}u_{3,3}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A}\mathbf{u}) = (\operatorname{div} \mathbf{A}^T) \cdot \mathbf{u} + \mathbf{A}^T : \nabla \mathbf{u}$$

Teorema de la divergència

Sia un cos B i una porció d'aquest que ocupa una regió Ω a l'espai, i sigui Γ el contorn de Ω .



Cas escalar:

$$\int_{\Omega} \nabla \alpha \, d\Omega = \oint_{\Gamma} \alpha \, \mathbf{n} \, d\Gamma$$

Cas vectorial:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u} \, d\Omega = \oint_{\Gamma} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma$$

Cas tensorial:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{A} \, d\Omega = \oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma$$