

Cinemàtica

Danilo Borges



danilo.borges@upc.edu

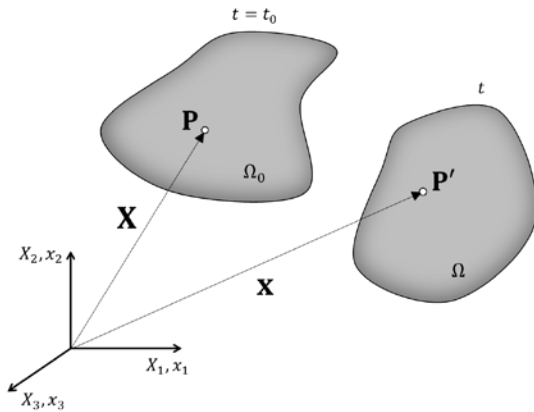


UNIVERSITAT POLITÈCNICA
DE CATALUNYA
BARCELONATECH

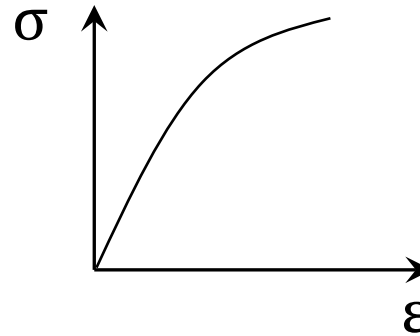
Teoria de l'elasticitat

Feb/2026

Relacions cinemàtiques



Relacions constitutives



Relacions de balanç (equilibri)

$$\sum F_i = 0$$

1. Descripcions del moviment;
2. Tensor gradient de deformació;
3. Canvis de volum i àrea
4. Mesures de deformació;
5. Deformacions principals;
6. Tensor de deformacions infinitessimals i tensor de rotacions;
7. Taxa de deformació i tensors de vorticitat;
8. Teorema de la descomposició polar

Cinemàtica

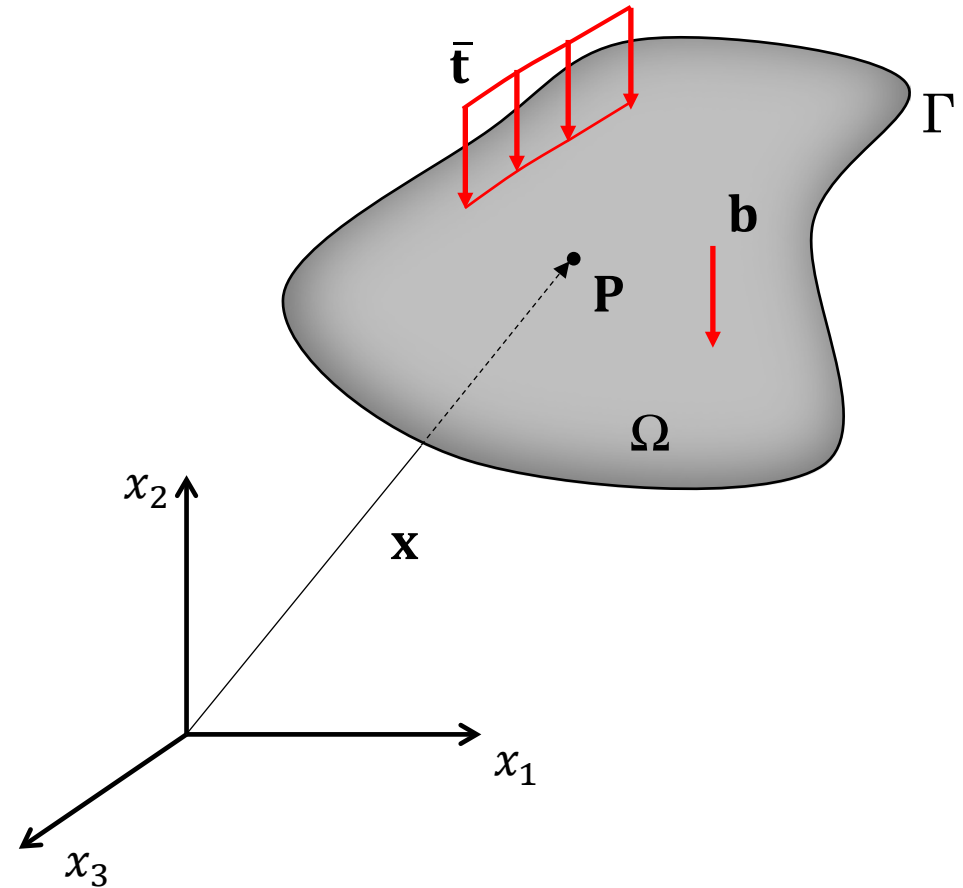


Descripcions del moviment

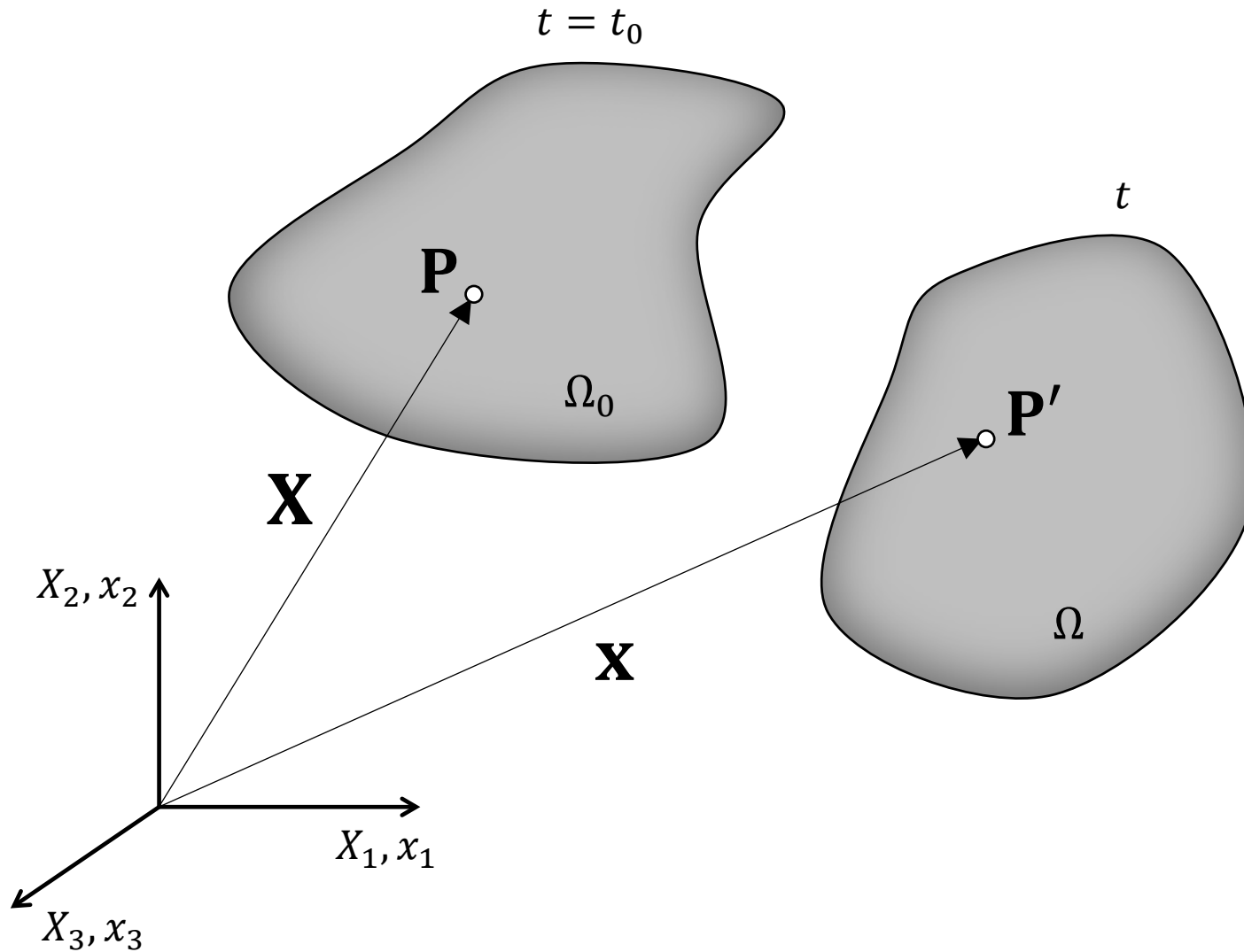


D. Borges (UPC)

La cinemàtica consisteix en
**l'estudi dels canvis de la
geometria d'un medi continu**
sense tenir en compte les forces
que causen aquests canvis

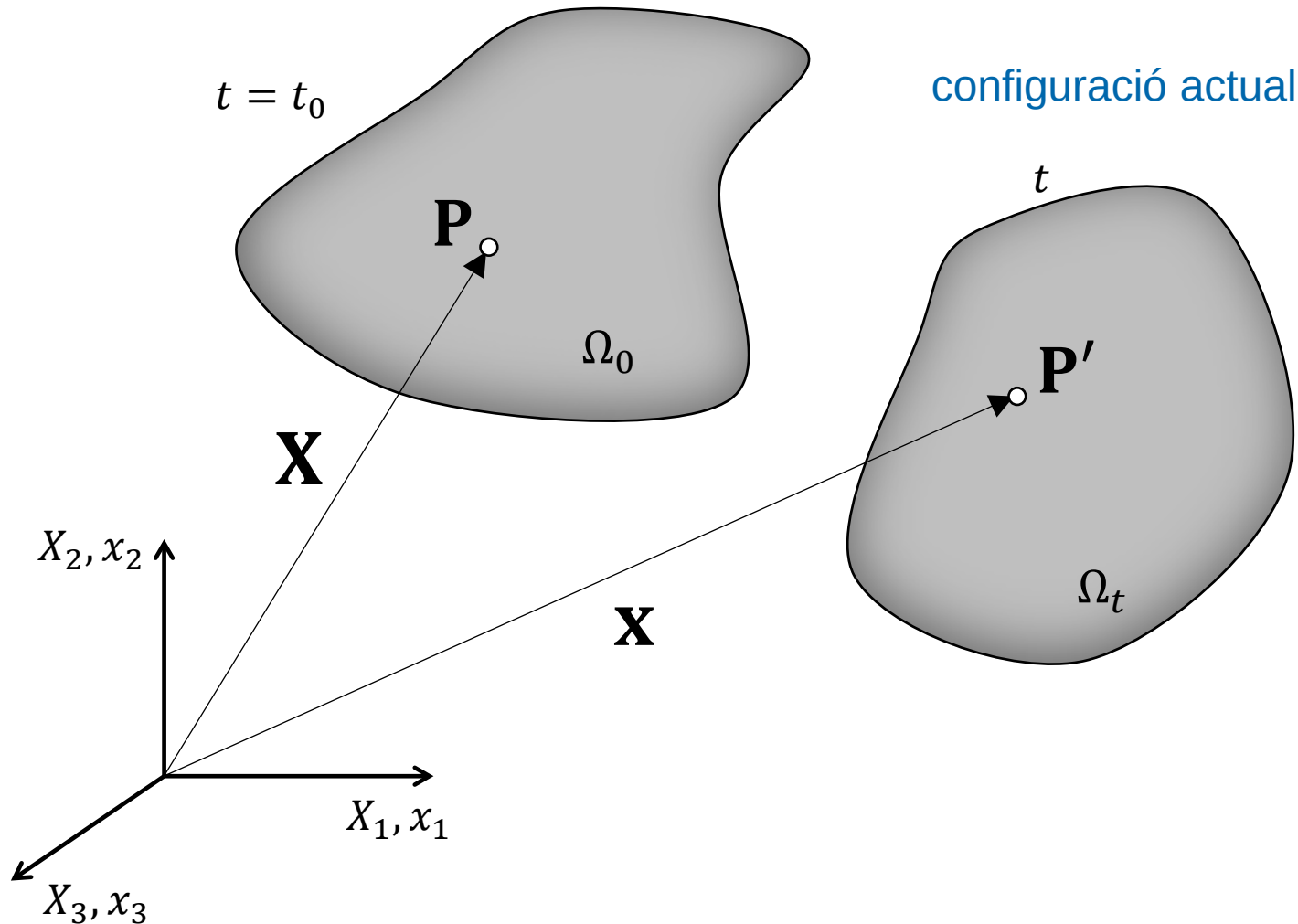


Moviment de partícules en un cos



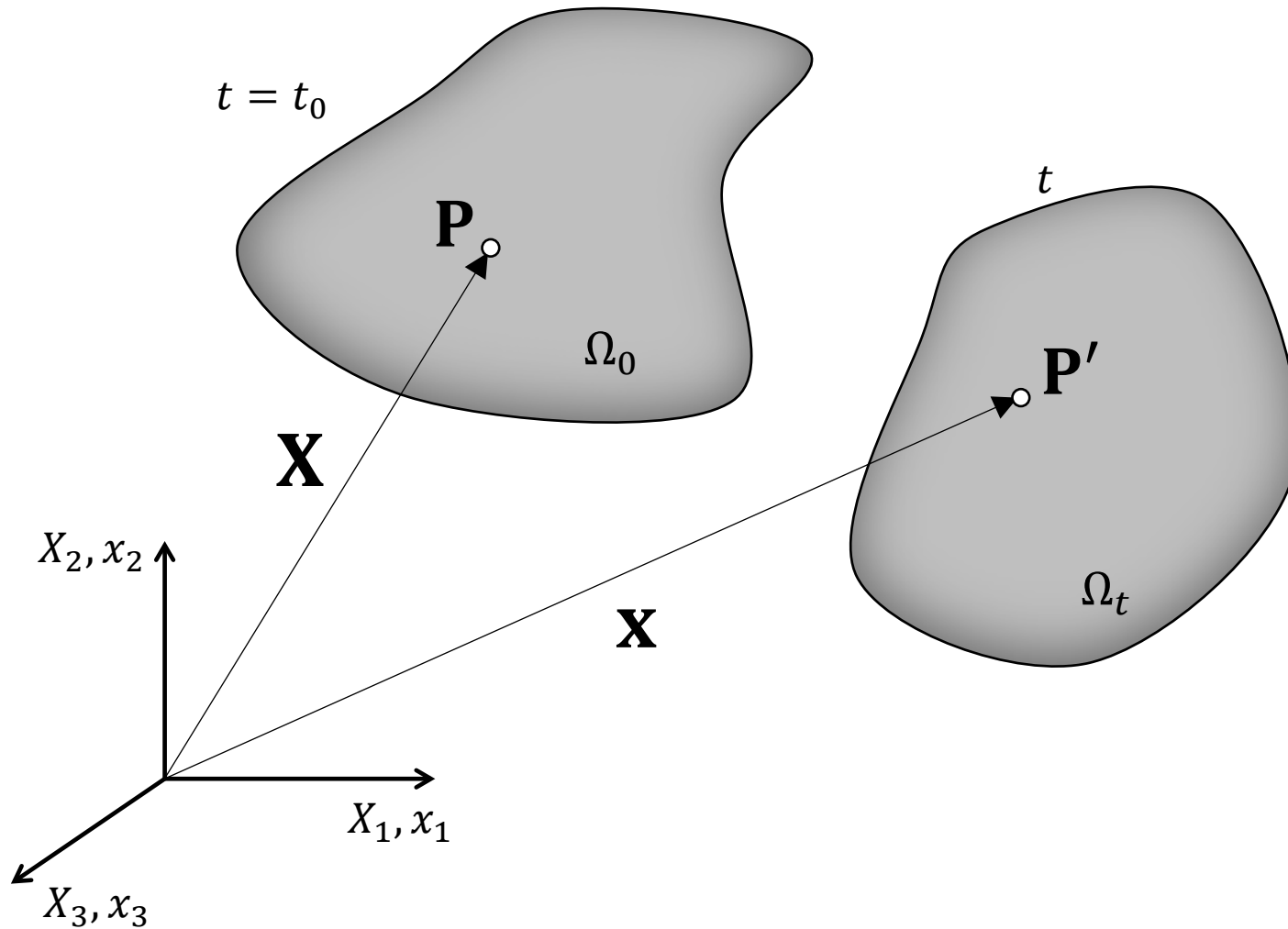
A mesura que s'aplica la càrrega, el cos ocupa diferents configuracions en l'espai.

Configuració inicial / material / de referència



Configuració

Lloc geomètric de les posicions que ocupen a l'espai les partícules del medi continu per a un instant t determinat



Punt / coordenada espacial ($\mathbf{x}$)

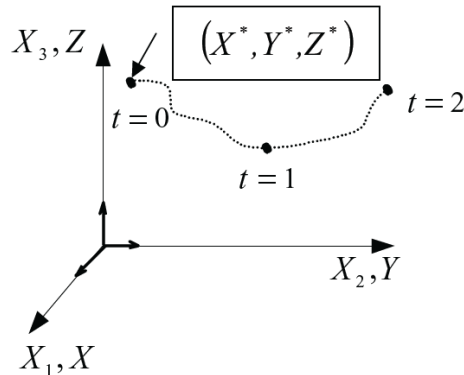
Punt fix a l'espai

Punt / coordenada material ($\mathbf{X}$)

Una partícula. Pot ocupar diferents punts espacials en el seu moviment al llarg del temps.

Descripció material (Lagrangiana)

- Descripció en funció d'on era el cos abans de la deformació
- La variació de ρ dins del cos es descriu respecte de la coordenada original (o inicial) $\mathbf{X}$, utilitzada per identificar una partícula material del continu en l'instant $t=0$:



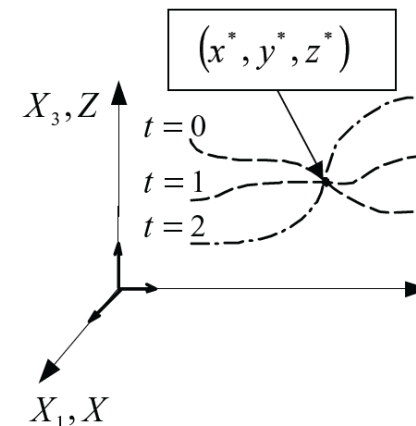
$$\rho = \rho(\mathbf{X}, t)$$

Quina de les dues és la més utilitzada en mecànica dels sòlids?



Descripció espacial (Euleriana)

- Descripció en funció d'on es troba durant la deformació
- Descriu el que ocorreix en una posició del espai
- ρ es descriu respecte de la posició a l'espai, $\mathbf{x}$, ocupada en aquell instant per una partícula material del continu en el temps t , és a dir

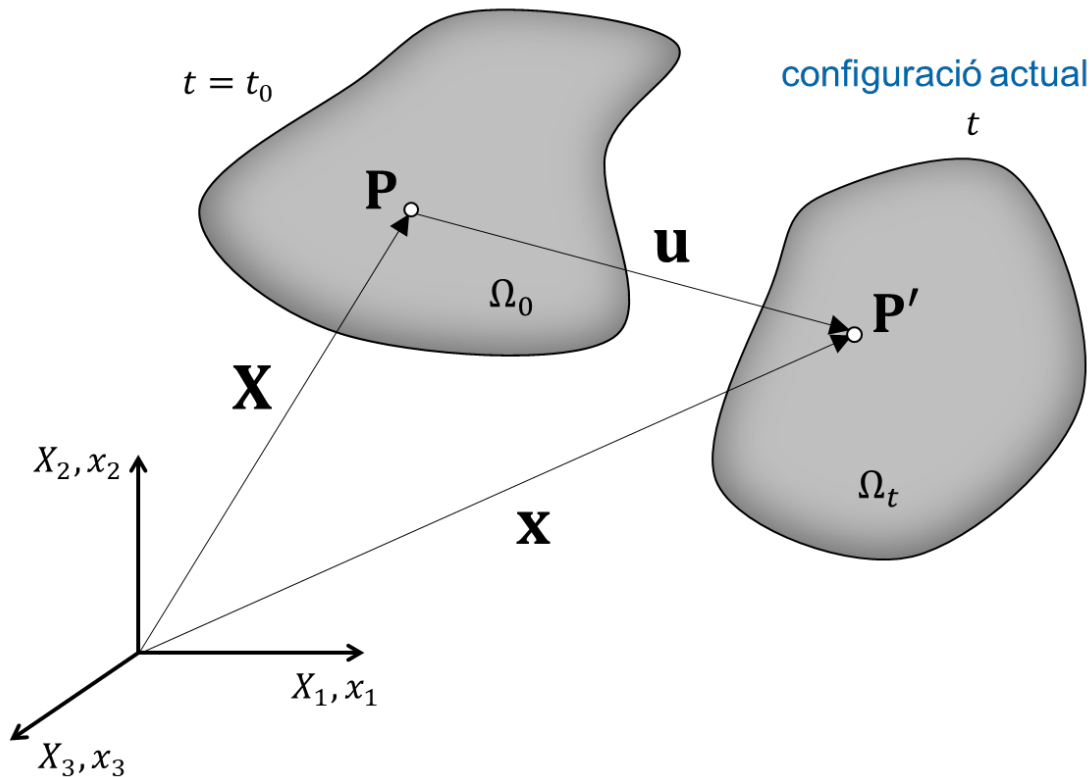


$$\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$$

Camp de desplaçaments

La deformació del continu fa referència a l'aparició de desplaçaments relatius i canvis geomètrics que es produeixen en un cos sota la influència d'un sistema de forces.

Configuració inicial / material / de referència



El desplaçament de una partícula és

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X}$$

Quina descripció del moviment s'està utilitzant?



Cinemàtica del continu

Tensor gradient de deformació

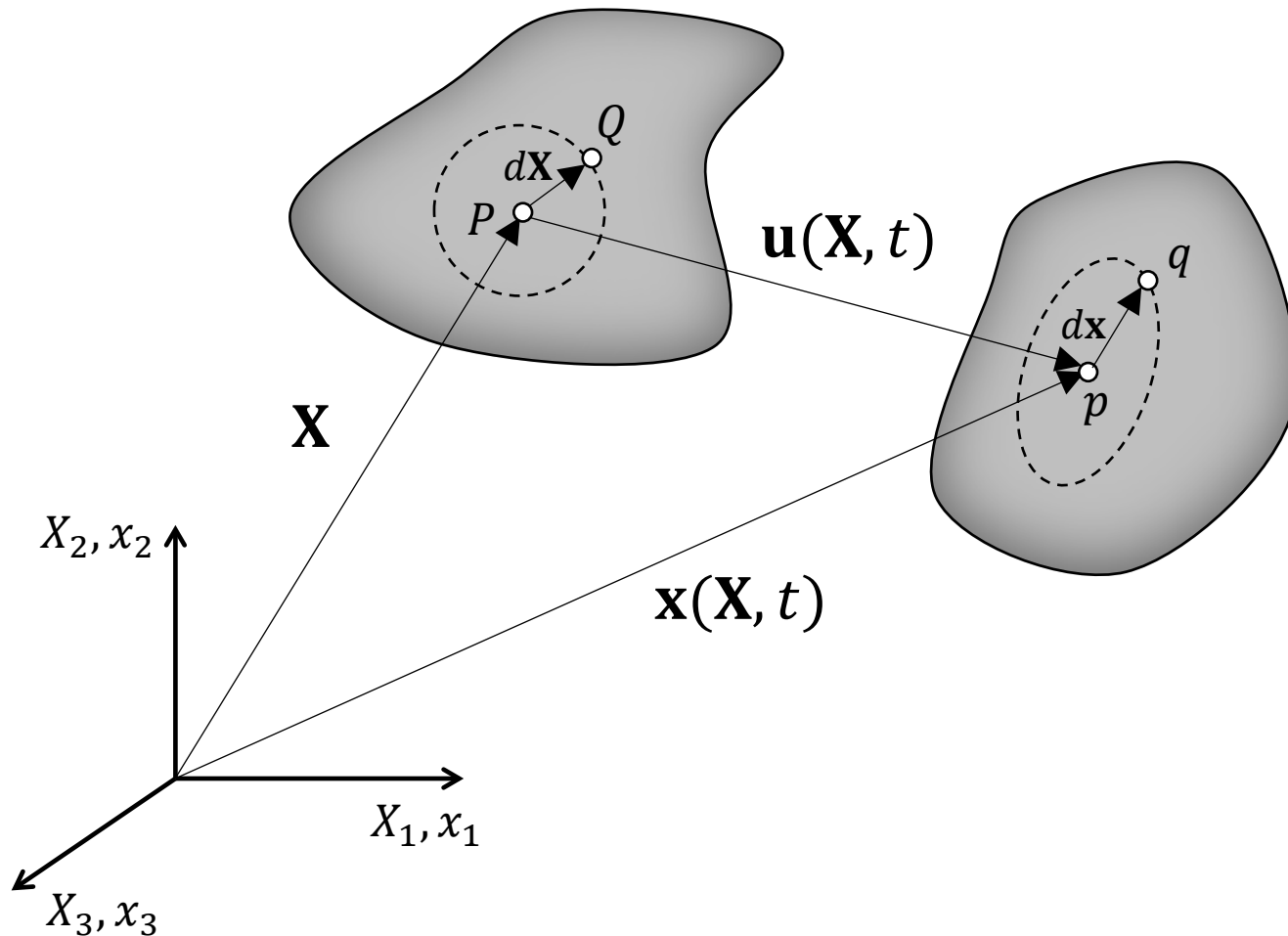
Quan una partícula P es desplaça, què passa amb les partícules veïnes?

Mitjançant el càlcul diferencial, tenim

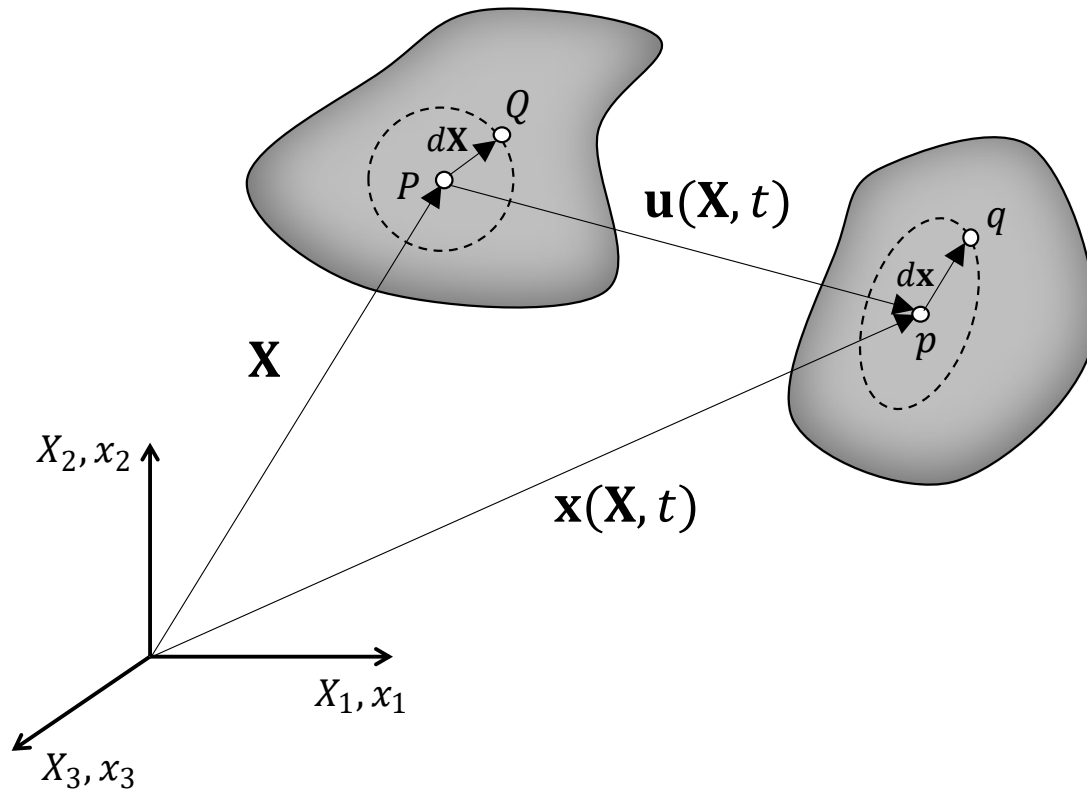
$$dx_1 = \frac{\partial x_1}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial x_1}{\partial X_2} dX_2 + \frac{\partial x_1}{\partial X_3} dX_3$$

$$dx_2 = \frac{\partial x_2}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial x_2}{\partial X_2} dX_2 + \frac{\partial x_2}{\partial X_3} dX_3$$

$$dx_3 = \frac{\partial x_3}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial x_3}{\partial X_2} dX_2 + \frac{\partial x_3}{\partial X_3} dX_3$$



Tensor gradient de deformació



El tensor gradient de deformació permet descriure la posició espacial relativa de dues partícules veïnes després de la deformació en funció de la seva posició material relativa abans de la deformació.

$$dx_1 = \frac{\partial x_1}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial x_1}{\partial X_2} dX_2 + \frac{\partial x_1}{\partial X_3} dX_3$$

$$dx_2 = \frac{\partial x_2}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial x_2}{\partial X_2} dX_2 + \frac{\partial x_2}{\partial X_3} dX_3$$

$$dx_3 = \frac{\partial x_3}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial x_3}{\partial X_2} dX_2 + \frac{\partial x_3}{\partial X_3} dX_3$$



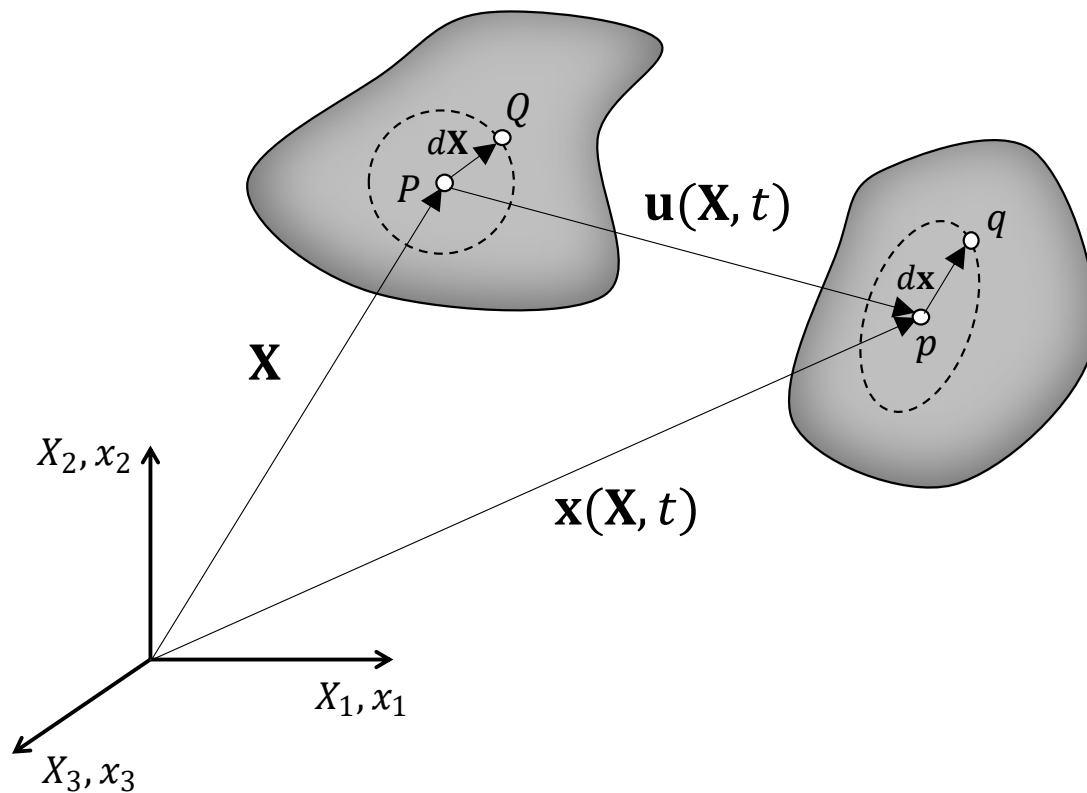
En forma matricial

$$\begin{Bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \\ dX_3 \end{Bmatrix}$$



$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X}$$

Tensor gradient de deformació



$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{F} = \nabla_0 \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$$

$$\mathbf{F} = \nabla_0 (\mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}, t))$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla_0 \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$$

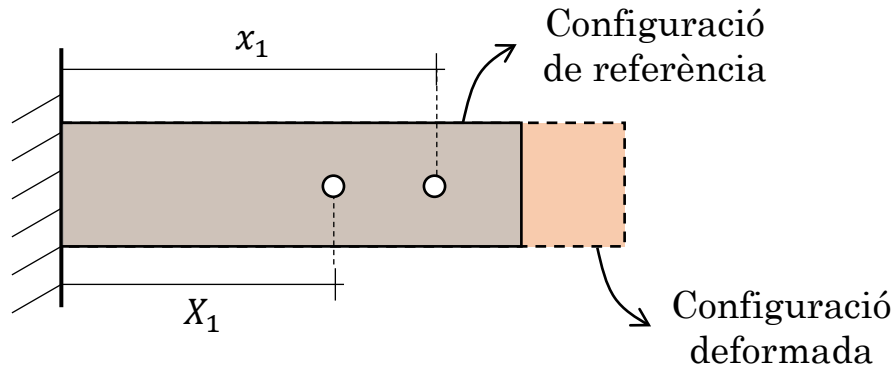


Gradient respecte de la configuració material

En notació indicial:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{E}}_j$$

Exemple: Deformació unidimensional



Quina és la posició actual i el gradient de deformació de la partícula situada al punt material $X_1=0.8$?

$$x_1 = 0.8 + 0.5(0.8)^2 = 1.12$$

$$\left. \frac{\partial x_1}{\partial X_1} \right|_{X_1 = 0.8} = 1 + 0.8 = 1.8$$

Equació de moviment

$$x_1 = X_1 + 0.5(X_1)^2$$

Gradient de deformació:

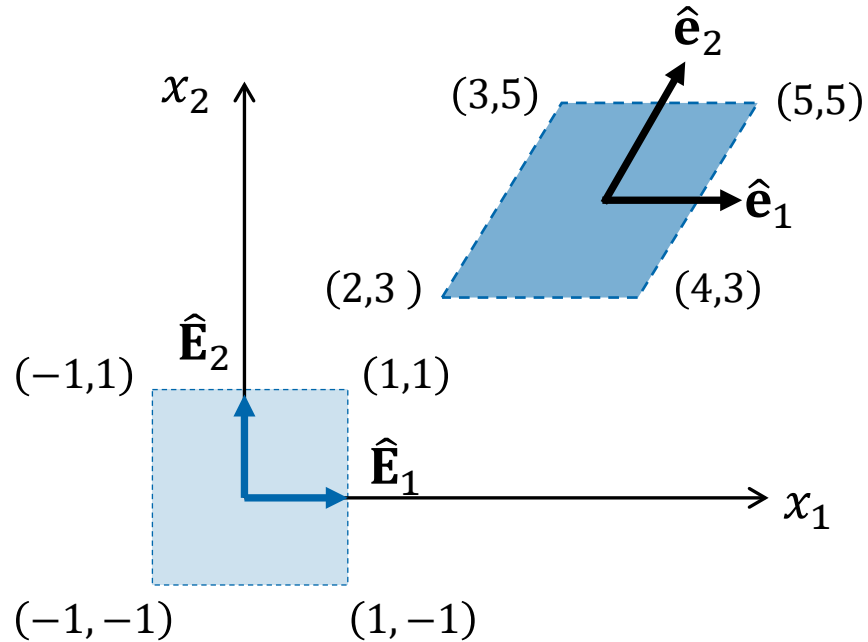
$$\frac{\partial x_1}{\partial X_1} = 1 + X_1$$

Considerant una partícula propera:

$$\frac{\Delta \bar{x}_1}{\Delta \bar{X}_1} = \frac{1.211 - 1.120}{0.85 - 0.80} = 1.82$$

Derivada numèrica

Exemple: Deformació bidimensional



Per recordar la interpretació geomètrica del determinant, reviseu el material de Conceptes Matemàtics Preliminars.

Equació de moviment

$$\mathbf{x} = (3.5 + X_1 + 0.5X_2)\hat{\mathbf{e}}_1 + (4 + X_2)\hat{\mathbf{e}}_2 + X_3 \hat{\mathbf{e}}_3$$

Gradient de deformació:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

➡ El cos ha patit una deformació per cisallament simple:

$$A = 4$$

$$a = ?$$

El determinant del gradient de deformació s'anomena **jacobià del moviment**.



- Quan el gradient de deformació $\mathbf{F}$ és independent de $\mathbf{X}$, és a dir, dona el mateix valor per a qualsevol punt material del cos.
- $\mathbf{x}=\mathbf{x}(\mathbf{X},t)$ es diu que és un moviment homogeni si, i només si, es pot expressar en la forma:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{b} \quad \rightarrow \quad \mathbf{F} = \mathbf{A}$$

Dilatació pura

$$\mathbf{x} = \lambda X_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + \lambda X_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + \lambda X_3 \hat{\mathbf{e}}_3$$

Extensió pura

$$\mathbf{x} = (1 + \alpha)X_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + X_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + X_3 \hat{\mathbf{e}}_3$$

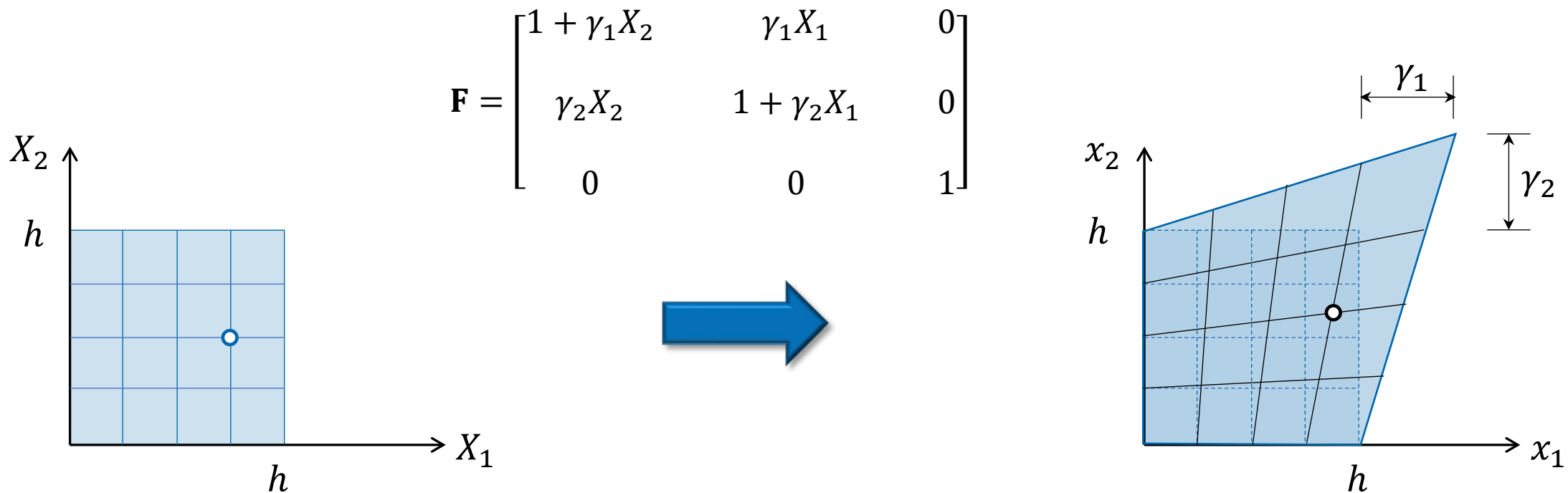
Cisallament simple

$$\mathbf{x} = (X_1 + \gamma X_2) \hat{\mathbf{e}}_1 + X_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + \lambda X_3 \hat{\mathbf{e}}_3$$

Deformació no homogènica

Quan el gradient de deformació $\mathbf{F}$ depèn de $\mathbf{X}$.

Exemple: $\mathbf{x} = X_1(1 + \gamma_1 X_2)\hat{\mathbf{e}}_1 + X_2(1 + \gamma_2 X_1)\hat{\mathbf{e}}_2 + \lambda X_3 \hat{\mathbf{e}}_3$



Cinemàtica del continu

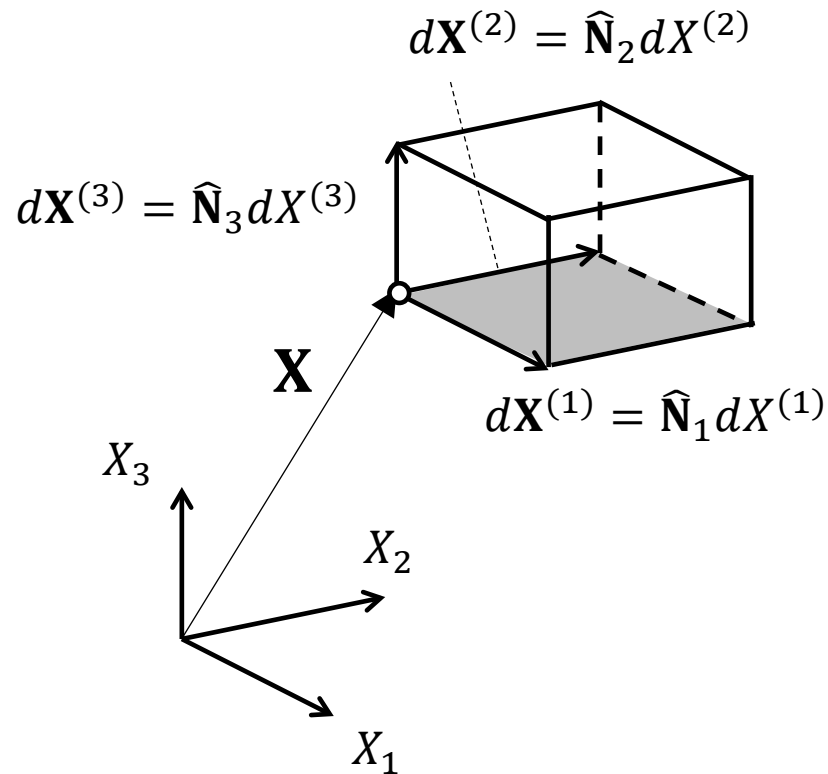


Canvis de volum i àrea



Volum de la configuració de referència

El volum del paral·lelogram definit per 3 vectors:



Els vectors $\hat{\mathbf{N}}_i$ formen una base ortonormal

$$dV = \text{Àrea} \cdot \text{Altura}$$

$$dV = \|d\mathbf{X}^{(1)} \times d\mathbf{X}^{(2)}\| h$$

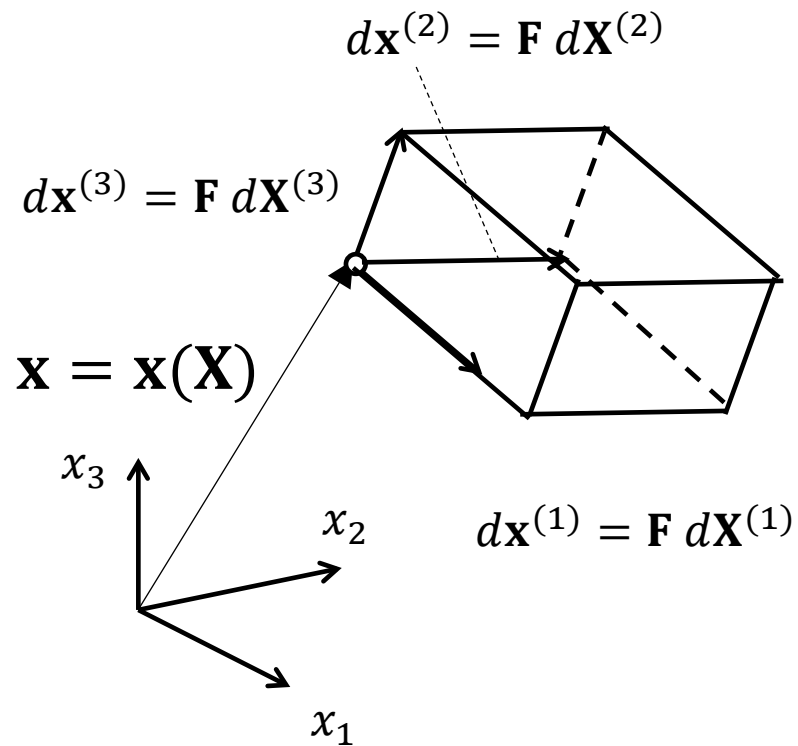
$$dV = \|d\mathbf{X}^{(1)} \times d\mathbf{X}^{(2)}\| \|d\mathbf{X}^{(3)}\| \cos \theta$$

$$dV = (d\mathbf{X}^{(1)} \times d\mathbf{X}^{(2)}) \cdot d\mathbf{X}^{(3)}$$

$$dV = \det \begin{pmatrix} d\hat{N}_1^{(1)} & d\hat{N}_1^{(2)} & d\hat{N}_1^{(3)} \\ d\hat{N}_2^{(1)} & d\hat{N}_2^{(2)} & d\hat{N}_2^{(3)} \\ d\hat{N}_3^{(1)} & d\hat{N}_3^{(2)} & d\hat{N}_3^{(3)} \end{pmatrix} dX^{(1)} dX^{(2)} dX^{(3)}$$

$$dV = dX^{(1)} dX^{(2)} dX^{(3)}$$

El volum a la configuració actual:



$$dv = (d\mathbf{x}^{(1)} \times d\mathbf{x}^{(2)}) \cdot d\mathbf{x}^{(3)}$$

$$dv = (\mathbf{F} \hat{\mathbf{N}}_1 dX^{(1)} \times \mathbf{F} \hat{\mathbf{N}}_2 dX^{(2)}) \cdot \mathbf{F} \hat{\mathbf{N}}_3 dX^{(3)}$$

$$dv = \{(\mathbf{F} \hat{\mathbf{N}}_1 \times \mathbf{F} \hat{\mathbf{N}}_2) \cdot \mathbf{F} \hat{\mathbf{N}}_3\} dX^{(2)} dX^{(1)} dX^{(3)}$$

$$dv = \det(\mathbf{F}) dV$$

$$dv = J dV$$

El Jacobià de la transformació té el significat físic de ser la raó del volum actual pel volum de la configuració de referència

$$dv = \{(\mathbf{F} \hat{\mathbf{N}}_1 \times \mathbf{F} \hat{\mathbf{N}}_2) \cdot \mathbf{F} \hat{\mathbf{N}}_3\} dX^{(2)} dX^{(1)} dX^{(3)}$$



$$dv = \det(\mathbf{F}) dV$$

Per facilitar la visualització, considereu els vectors unitaris de la base de referència com si fossin els vectors d'una base cartesiana ortonormal:

$$\mathbf{F} \hat{\mathbf{N}}_1 = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{11} \\ F_{21} \\ F_{31} \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{F} \hat{\mathbf{N}}_2 = \begin{Bmatrix} F_{12} \\ F_{22} \\ F_{32} \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{F} \hat{\mathbf{N}}_3 = \begin{Bmatrix} F_{13} \\ F_{23} \\ F_{33} \end{Bmatrix}$$

$$(\mathbf{F} \hat{\mathbf{N}}_1 \times \mathbf{F} \hat{\mathbf{N}}_2) \cdot \mathbf{F} \hat{\mathbf{N}}_3 = \begin{vmatrix} F_{11} & F_{21} & F_{31} \\ F_{12} & F_{22} & F_{32} \\ F_{13} & F_{23} & F_{33} \end{vmatrix} = \det(\mathbf{F}^T) = \det(\mathbf{F})$$



L'àrea infinitesimal pot ser expressada en la forma d'un vector de superfície,

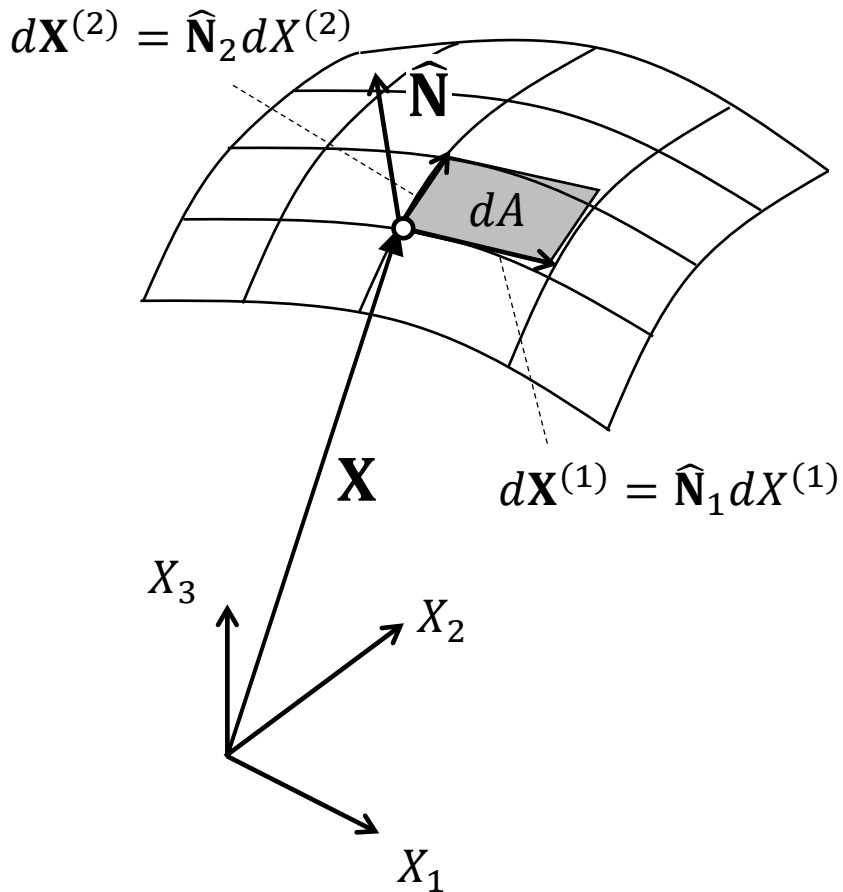
$$d\mathbf{A} = \hat{\mathbf{N}} dA$$

sent el vector normal al punt material a la superfície:

$$\hat{\mathbf{N}} = \frac{\hat{\mathbf{N}}_1 \times \hat{\mathbf{N}}_2}{\|\hat{\mathbf{N}}_1 \times \hat{\mathbf{N}}_2\|}$$

L'àrea infinitesimal és:

$$dA = \|\hat{\mathbf{N}}_1 \times \hat{\mathbf{N}}_2\| dX^{(1)} dX^{(2)}$$



Canvi de l'àrea d'una superfície

$$d\mathbf{a} = \hat{\mathbf{n}} da$$

$$dv = J dV \quad \Rightarrow \quad d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{a} = J (d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{A})$$

$$\mathbf{F} d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{a} = J (d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{A})$$

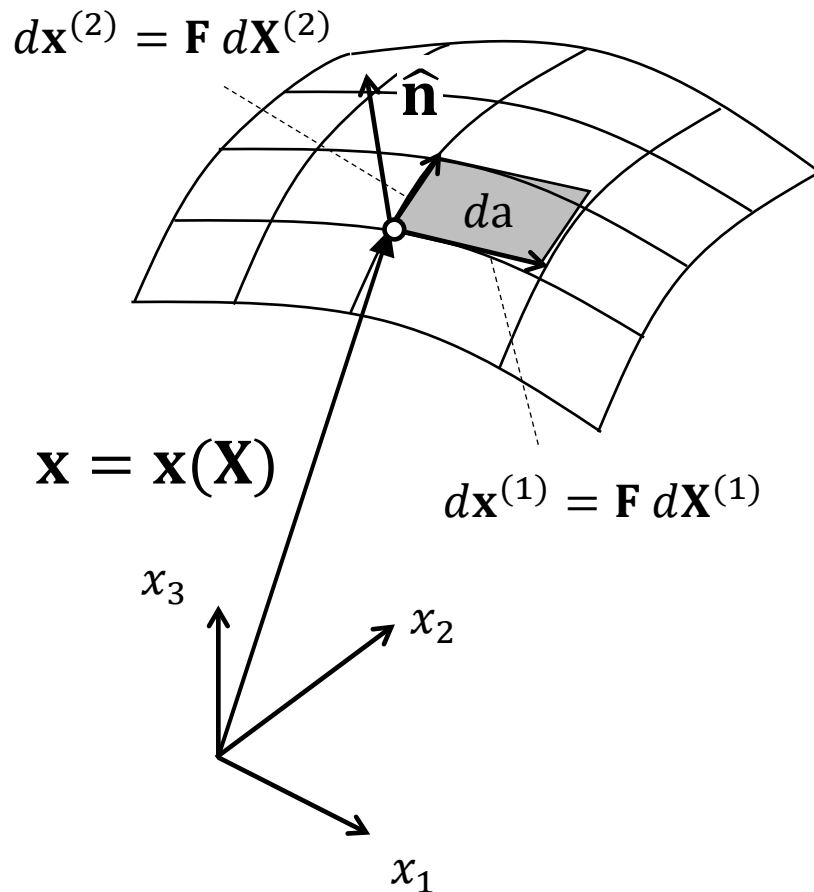
$$d\mathbf{X}^T \mathbf{F}^T d\mathbf{a} = J (d\mathbf{X}^T d\mathbf{A})$$

$$d\mathbf{X}^T \mathbf{F}^T d\mathbf{a} - J (d\mathbf{X}^T d\mathbf{A}) = 0$$

$$d\mathbf{X}^T (\mathbf{F}^T d\mathbf{a} - J d\mathbf{A}) = 0$$

$$\mathbf{F}^T d\mathbf{a} - J d\mathbf{A} = 0$$

$$\mathbf{F}^T d\mathbf{a} = J d\mathbf{A} \quad \Rightarrow \quad d\mathbf{a} = J \mathbf{F}^{-T} d\mathbf{A}$$

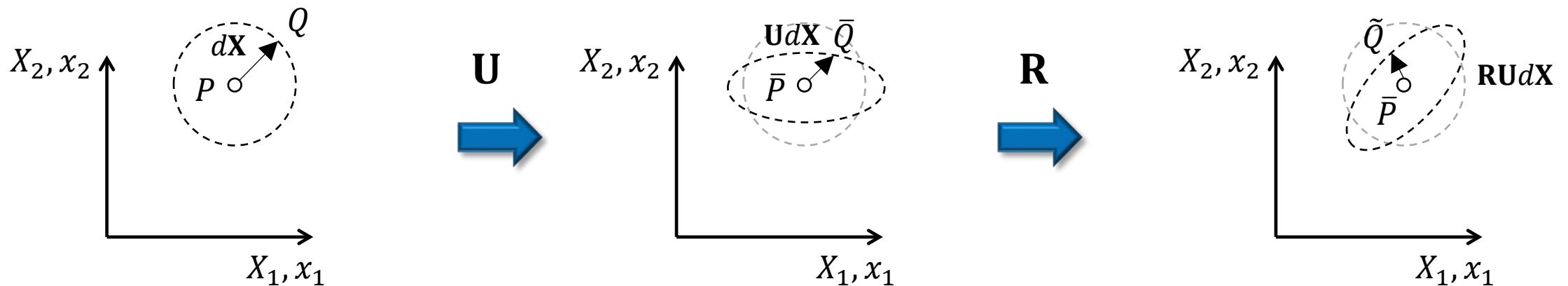


Cinemàtica del continu

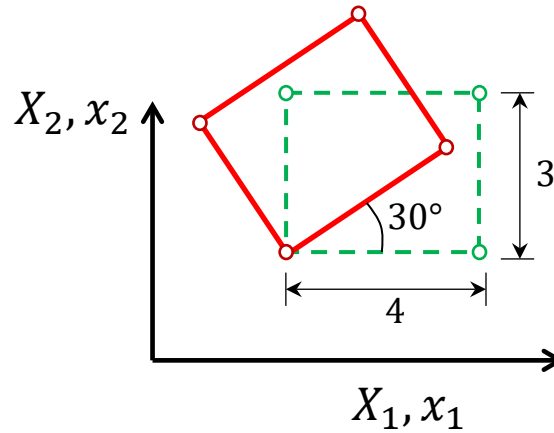
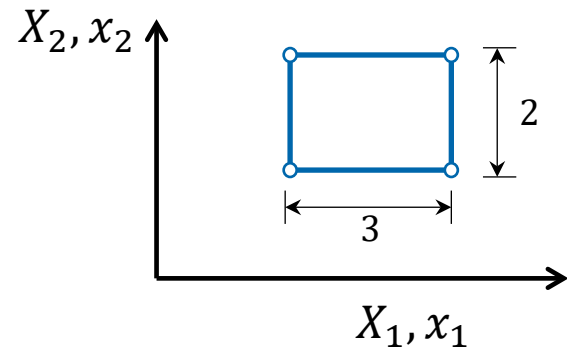
Teorema de la descomposició polar

Descomposició polar del tensor $\mathbf{F}$

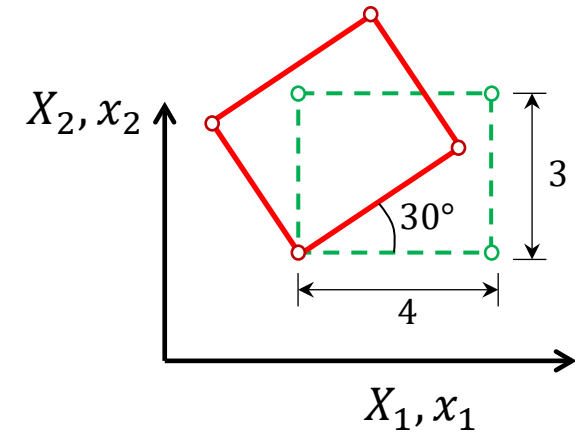
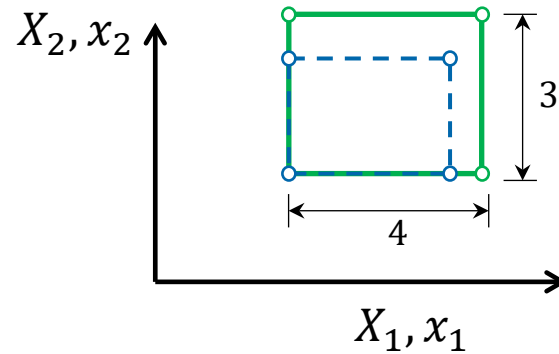
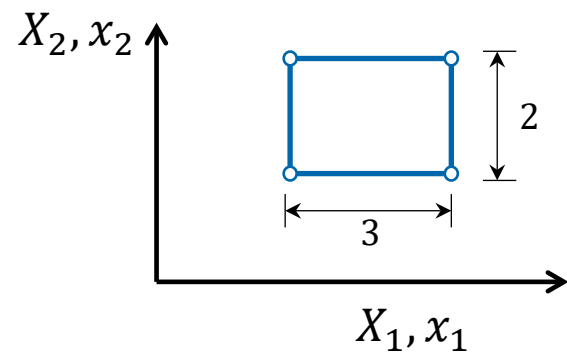
Permet descomposar un tensor en un producte d'un tensor ortogonal ($\mathbf{R}$) i un tensor simètric ($\mathbf{U}$).



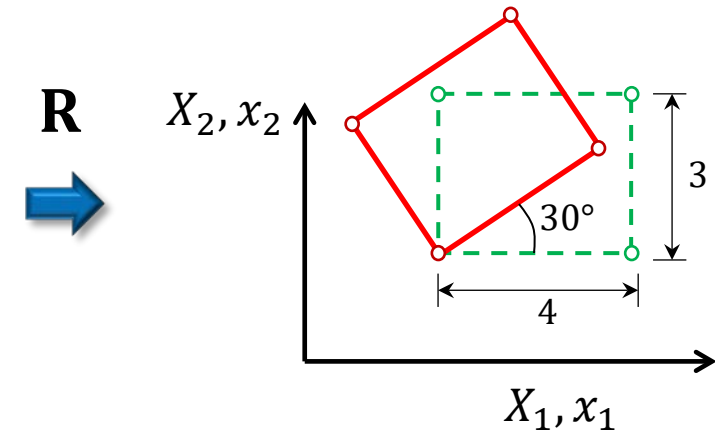
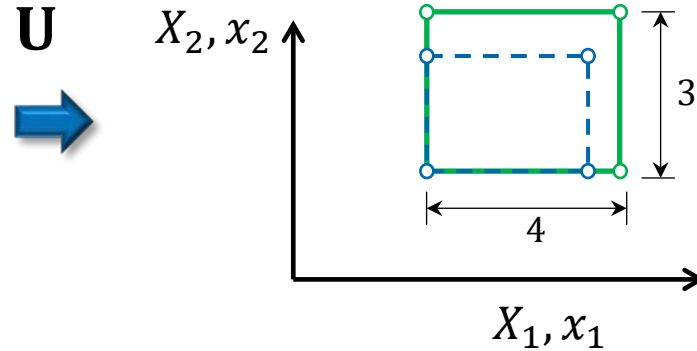
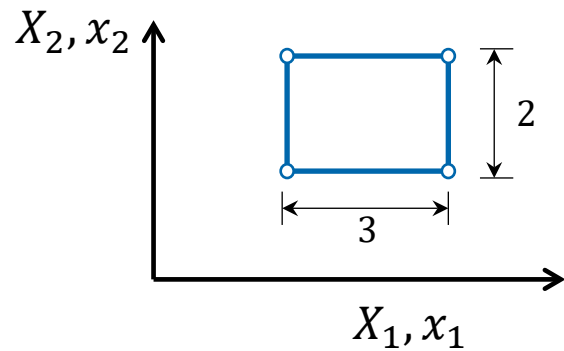
Exemple: Allargament uniforme i rotació



$$F = \begin{bmatrix} 1.154 & -0.750 \\ 0.667 & 1.299 \end{bmatrix}$$



Exemple: Allargament uniforme i rotació



$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1.154 & -0.750 \\ 0.667 & 1.299 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 4/3 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1.333 & 0 \\ 0 & 1.500 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.500 \\ 0.500 & 0.866 \end{bmatrix}$$

Com puc
obtenir els
tensors **R** i **U**?

☑ **F = R U**



$$\begin{bmatrix} 0.866 & -0.500 \\ 0.500 & 0.866 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.333 & 0 \\ 0 & 1.500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.154 & -0.750 \\ 0.667 & 1.299 \end{bmatrix}$$



Descomposició espectral

En anglès: *Eigenvalue decomposition*

Exemple d'un problema d'autovalors:

$$\mathbf{A} \mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 4 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$
$$\lambda_1 = 7 \quad \mathbf{v}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$
$$\lambda_2 = 4 \quad \mathbf{v}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$
$$\lambda_3 = 3 \quad \mathbf{v}_3 = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{Bmatrix}$$

El problema es pot plantejar de manera compacta fent:

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{X} \mathbf{\Lambda}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{X} \mathbf{\Lambda} \mathbf{X}^{-1}$$

$\mathbf{X}$: cada columna emmagatzema un autovector d' $\mathbf{A}$

$\mathbf{\Lambda}$: matriu diagonal que conté els autovalors associats

$$\mathbf{A} = \mathbf{X} \mathbf{\Lambda} \mathbf{X}^{-1}$$

Permet, per exemple, obtenir fàcilment $\mathbf{A}^2$:

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{X} \mathbf{\Lambda} \mathbf{X}^{-1} \mathbf{X} \mathbf{\Lambda} \mathbf{X}^{-1} = \mathbf{X} \mathbf{\Lambda} \mathbf{I} \mathbf{\Lambda} \mathbf{X}^{-1} = \mathbf{X} \mathbf{\Lambda}^2 \mathbf{X}^{-1}$$

$$\mathbf{\Lambda}^2 = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_N^2 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A}^2$ té els mateixos autovectors que $\mathbf{A}$ i els autovalors d' $\mathbf{A}^2$ són els autovalors d' $\mathbf{A}$ elevats al quadrat.

El mateix es pot fer per a qualsevol potència d' $\mathbf{A}$.



Autovectors de matrius simètriques

Una matriu és simètrica si: $\mathbf{S} = \mathbf{S}^T$

Considerant dos autovalors (λ_1, λ_2) e autovectores distintos $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ asociados a $\mathbf{S}$:

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{S} \mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x} & \xrightarrow{\quad} & \mathbf{y}^T \mathbf{S} \mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{y}^T \mathbf{x} \\ \mathbf{S} \mathbf{y} = \lambda_2 \mathbf{y} & & \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{y} = \lambda_2 \mathbf{x}^T \mathbf{y} \end{array} \quad \xrightarrow{\quad} \quad \begin{array}{c} \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{y} = \lambda_1 \mathbf{x}^T \mathbf{y} \\ - \\ \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{y} = \lambda_2 \mathbf{x}^T \mathbf{y} \\ \hline \end{array}$$

Recordem que:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^T \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{x}$$

$$(\mathbf{S} \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = (\mathbf{S} \mathbf{x})^T \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{S}^T \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{y}$$

$$\mathbf{y} \cdot (\mathbf{S} \mathbf{x}) = \mathbf{y}^T \mathbf{S} \mathbf{x}$$

$$0 = (\lambda_1 - \lambda_2) \mathbf{x}^T \mathbf{y}$$

Com que els autovalors són diferents:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$$

Els autovectors d'una matriu simètrica són ortogonals

Com que els autovectors d'una matriu simètrica són ortogonals, si es normalitzen, esdevenen ortonormals. Així, la descomposició espectral és:

$$\mathbf{S} = \mathbf{X} \mathbf{\Lambda} \mathbf{X}^{-1}$$

Com que les columnes de $\mathbf{X}$ són vectors ortonormals, aquesta matriu és ortogonal; per tant:

$$\mathbf{X}^{-1} = \mathbf{X}^T$$

Finalment, tenim:

$$\mathbf{S} = \mathbf{X} \mathbf{\Lambda} \mathbf{X}^T$$

Tota matriu es pot descompondre en una matriu simètrica (**S**) i una matriu ortogonal (**Q**):

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q} \mathbf{S}$$

- **Q**: efectes de rotació i reflexió;
- **S**: efectes d'allargament/escurçament al llarg dels eixos ortogonals

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q} \mathbf{S}$$

Multiplicant per $\mathbf{A}^T$ a l'esquerra:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = (\mathbf{Q} \mathbf{S})^T \mathbf{Q} \mathbf{S}$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{S}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \mathbf{S}$$

Com que $\mathbf{Q}$ és ortogonal i $\mathbf{S}$ és simètrica, tenim:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{S} \mathbf{I} \mathbf{S} \quad \rightarrow \quad \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{S}^2$$

La matriu $\mathbf{S}$ s'obté fent:

$$\mathbf{S} = \sqrt{\mathbf{A}^T \mathbf{A}} = \sqrt{\mathbf{C}}$$

Utilitzant la descomposició espectral de $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{C} = \mathbf{X} \mathbf{\Lambda} \mathbf{X}^{-1} = \mathbf{X} \mathbf{\Lambda} \mathbf{X}^T$$

$$\sqrt{\mathbf{C}} = \mathbf{S} = \mathbf{X} \mathbf{\Lambda}^{1/2} \mathbf{X}^T$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{A} \mathbf{S}^{-1}$$

Descomposició polar del tensor $\mathbf{F}$

Definicions

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X}$$

$$d\mathbf{x} = (\mathbf{R} \mathbf{U}) d\mathbf{X} = (\mathbf{V} \mathbf{R}) d\mathbf{X}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \mathbf{U}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{V} \mathbf{R}$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{F}$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{F} \mathbf{R}^{-1}$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{R}^T \mathbf{F}$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{F} \mathbf{R}^T$$

$$\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{F}^T \mathbf{R} \mathbf{R}^T \mathbf{F}$$

$$\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{C}$$

Obtenció de $\mathbf{U}$

$$\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{C} \Rightarrow \text{Per la simetria d'\mathbf{U}: } \mathbf{U}^2 = \mathbf{C}$$

Aplicant la descomposició espectral, considerant la simetria de $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} \mathbf{A}^T$$

$$\Downarrow \mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{C}}$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \mathbf{A}^T$$

El tensor simètric **U** correspon al tensor d'allargaments del material:

$$\mathbf{U}^2 = \mathbf{C} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{C} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} \mathbf{A}^T \quad \Rightarrow \quad \mathbf{C} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i$$

$$\mathbf{A} = \{\mathbf{N}_1 \quad \mathbf{N}_2 \quad \mathbf{N}_3\}$$

Les columnes d' **A** corresponen a les direccions en què es produeixen els allargaments principals

Cinemàtica del continu

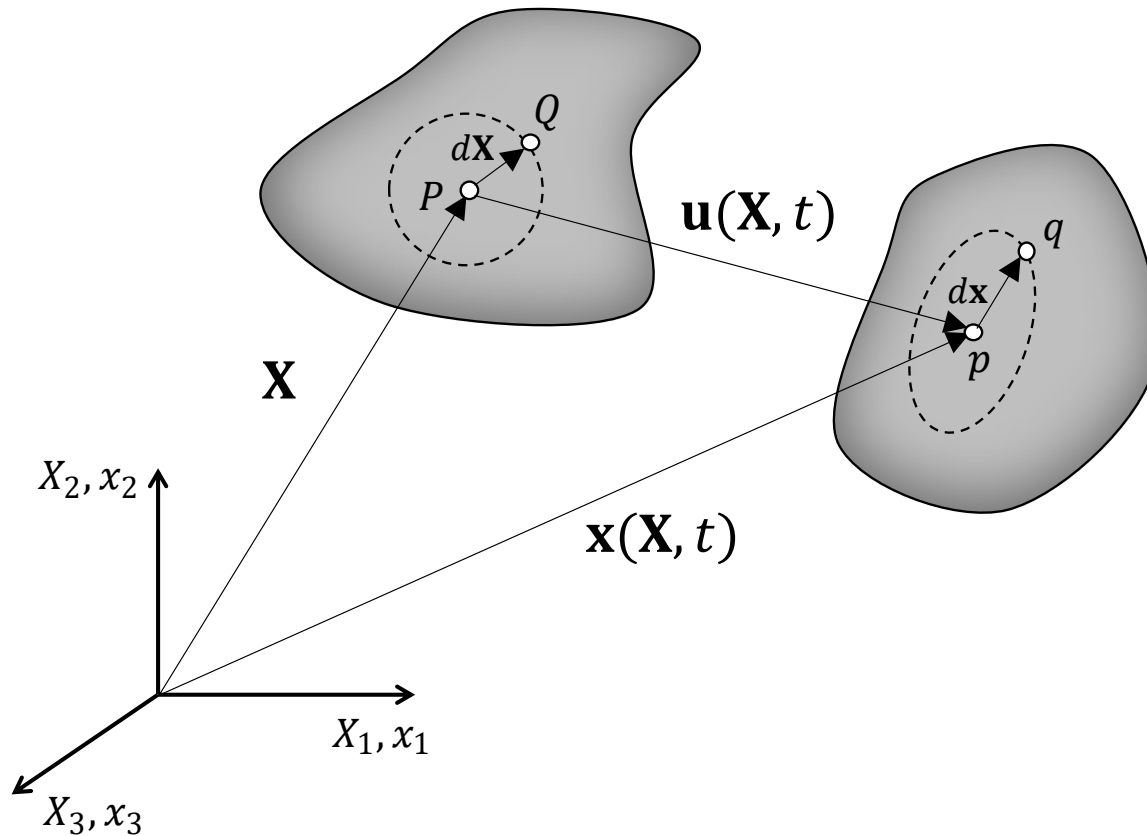


Mesures de deformació



Tensors de deformació de Cauchy–Green

Es vol determinar el canvi de magnitud del vector que mesura la distància entre dos punts veïns P i Q després de la deformació..



$$(dS)^2 = d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}$$

$$(ds)^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} \quad (ds)^2 = (d\mathbf{x})^T d\mathbf{x}$$

$$(ds)^2 = (\mathbf{F}d\mathbf{X})^T \mathbf{F}d\mathbf{X}$$

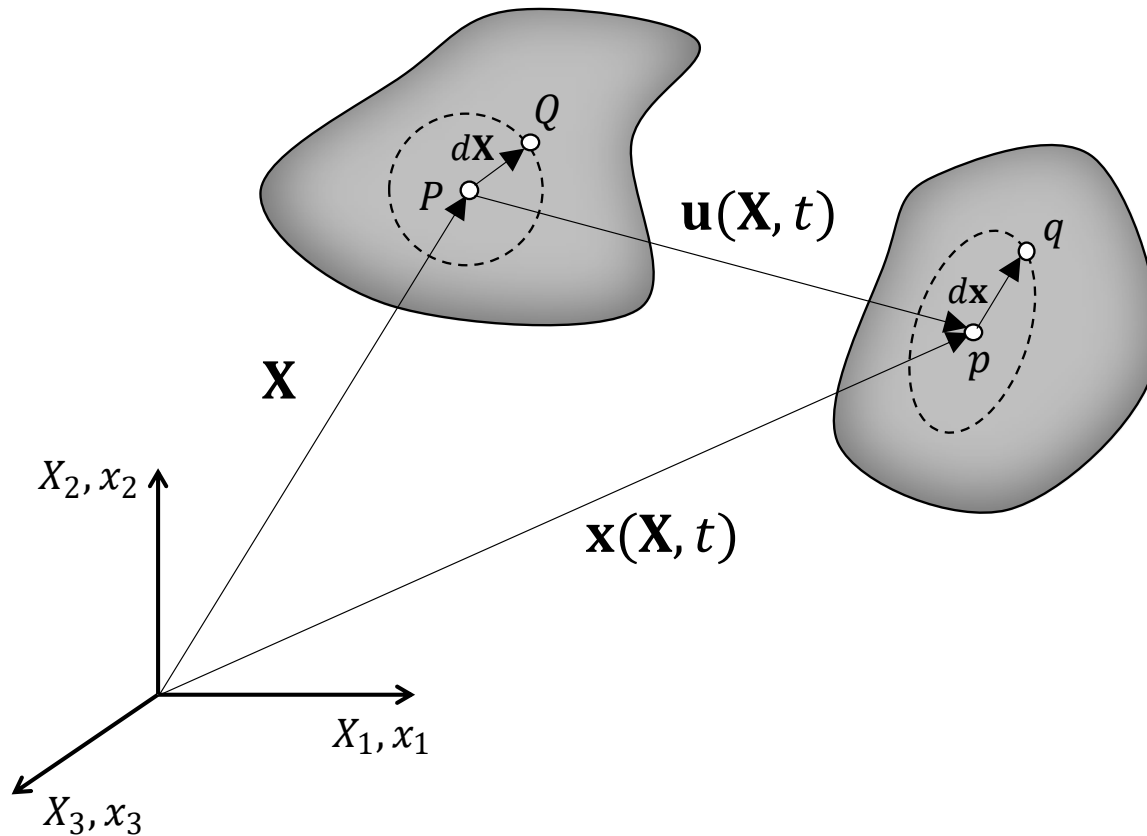
$$(ds)^2 = d\mathbf{X}^T \mathbf{F}^T \mathbf{F} d\mathbf{X}$$

$$(ds)^2 = d\mathbf{X}^T \mathbf{C} d\mathbf{X} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$$

$\mathbf{C}$ és l'anomenat tensor de deformació de Cauchy–Green dret

Tensors de deformació de Cauchy–Green

Es vol determinar el canvi de magnitud del vector que mesura la distància entre dos punts veïns P i Q després de la deformació..

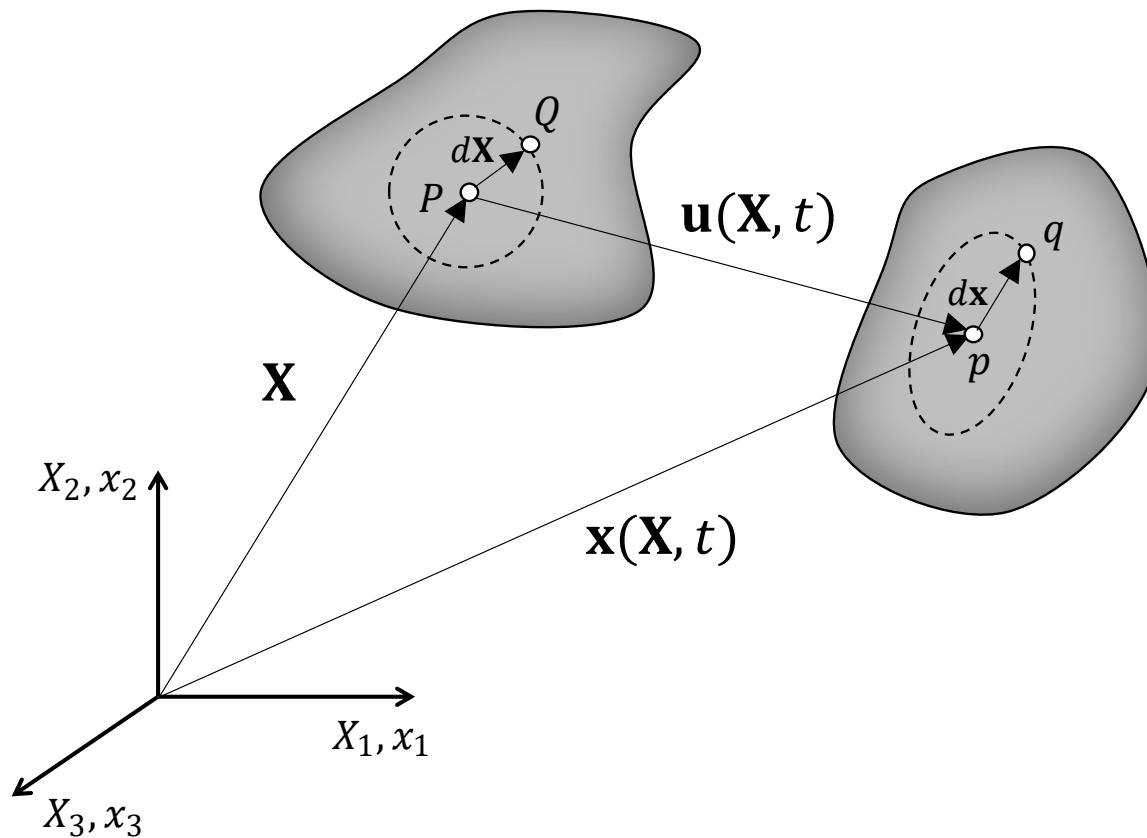


$$\frac{(ds)^2}{(dS)^2} = \frac{d\mathbf{X}^T}{dS} \mathbf{C} \frac{d\mathbf{X}}{dS}$$

$$\frac{(ds)^2}{(dS)^2} = d\mathbf{N}^T \mathbf{C} d\mathbf{N}$$

$$\lambda^2 = d\mathbf{N}^T \mathbf{C} d\mathbf{N}$$

$\mathbf{C}$ és l'anomenat tensor de deformació de Cauchy–Green dret



$$(ds)^2 - (dS)^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}$$

$$(ds)^2 - (dS)^2 = d\mathbf{X}^T \mathbf{C} d\mathbf{X} - d\mathbf{X}^T d\mathbf{X}$$

$$(ds)^2 - (dS)^2 = d\mathbf{X}^T \mathbf{C} d\mathbf{X} - d\mathbf{X}^T \mathbf{I} d\mathbf{X}$$

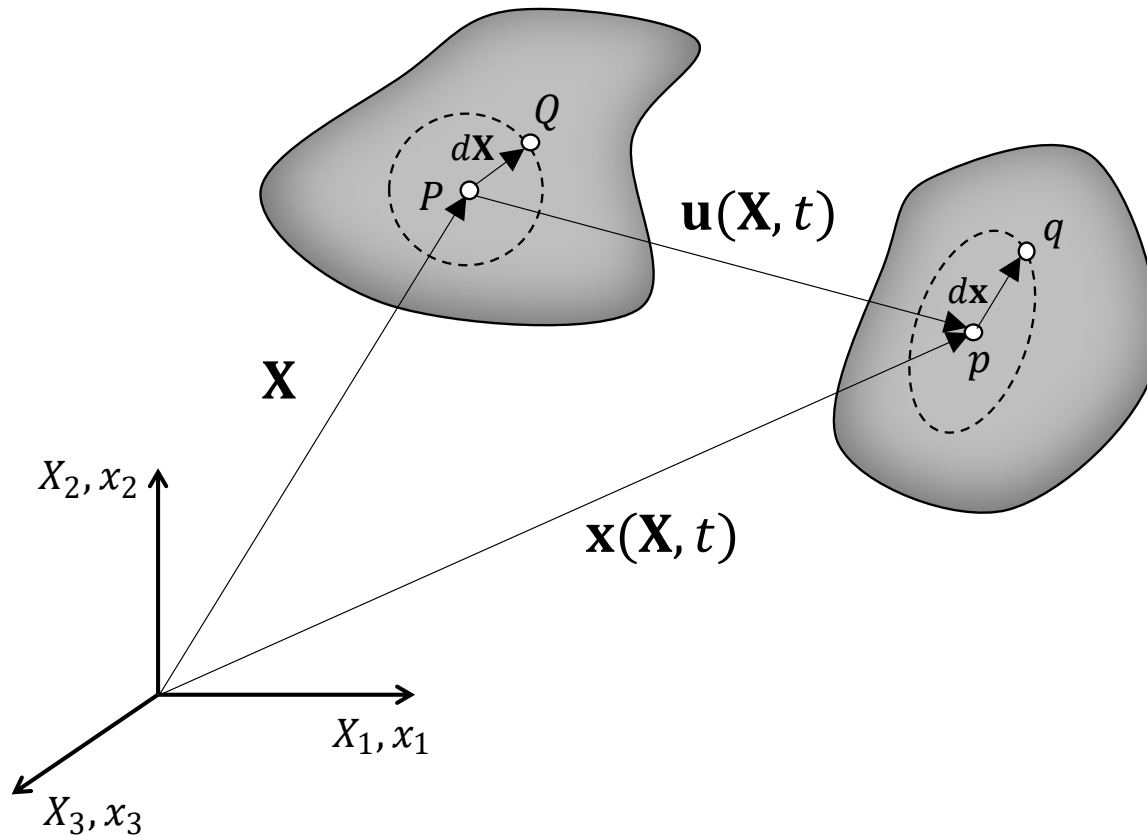
$$(ds)^2 - (dS)^2 = d\mathbf{X}^T (\mathbf{C} - \mathbf{I}) d\mathbf{X}$$

$$(ds)^2 - (dS)^2 = d\mathbf{X}^T (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) d\mathbf{X}$$

$$(ds)^2 - (dS)^2 = 2 d\mathbf{X}^T \mathbf{E} d\mathbf{X}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I})$$

$$(ds)^2 - (dS)^2 = 2 d\mathbf{X}^T \mathbf{E} d\mathbf{X}$$



$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I})$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left((\mathbf{I} + \nabla_0 \mathbf{u})^T (\mathbf{I} + \nabla_0 \mathbf{u}) - \mathbf{I} \right)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left((\mathbf{I} + \nabla_0 \mathbf{u}^T) (\mathbf{I} + \nabla_0 \mathbf{u}) - \mathbf{I} \right)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{I} + \nabla_0 \mathbf{u} + \nabla_0 \mathbf{u}^T + \nabla_0 \mathbf{u}^T \nabla_0 \mathbf{u} - \mathbf{I})$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\nabla_0 \mathbf{u} + \nabla_0 \mathbf{u}^T + \nabla_0 \mathbf{u}^T \nabla_0 \mathbf{u})$$

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} + \frac{\partial U_k}{\partial X_i} \frac{\partial U_k}{\partial X_j} \right)$$

Components del tensor:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} + \frac{\partial U_k}{\partial X_i} \frac{\partial U_k}{\partial X_j} \right)$$

Deformacions normals:

$$E_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right)^2 \right] \quad E_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right)^2 \right]$$

$$E_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial X_3} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_3} \right)^2 \right]$$

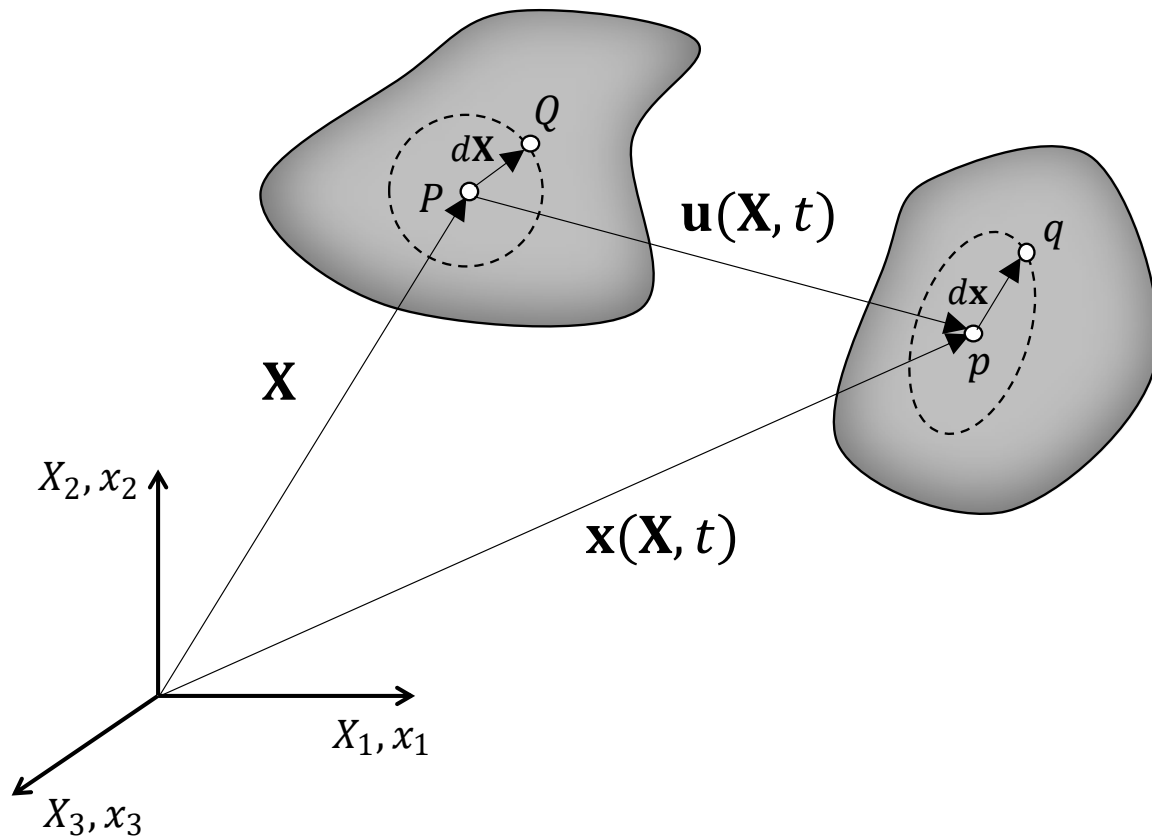
Deformacions de cisallament:

$$E_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right) \quad E_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \frac{\partial u_3}{\partial X_3} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \right)$$

$$E_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} + \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \right)$$

Tensor de deformació de Green-Lagrange

Interpretació física de la deformació normal de Green en una direcció:



Proporciona la deformació normal de Green en una direcció la normal de la qual és **N**

$$ds^2 - dS^2 = 2 d\mathbf{X}^T \mathbf{E} d\mathbf{X}$$

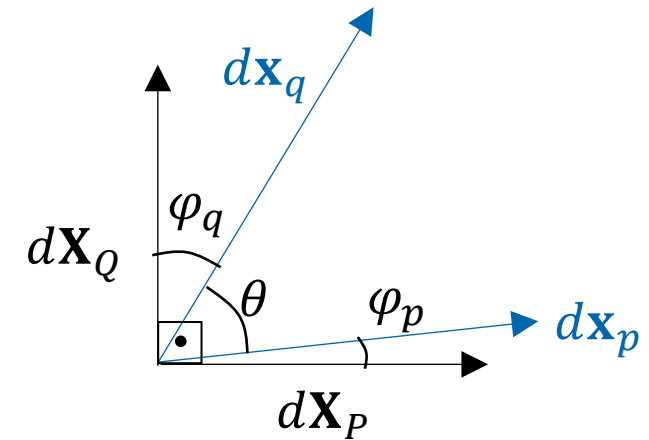
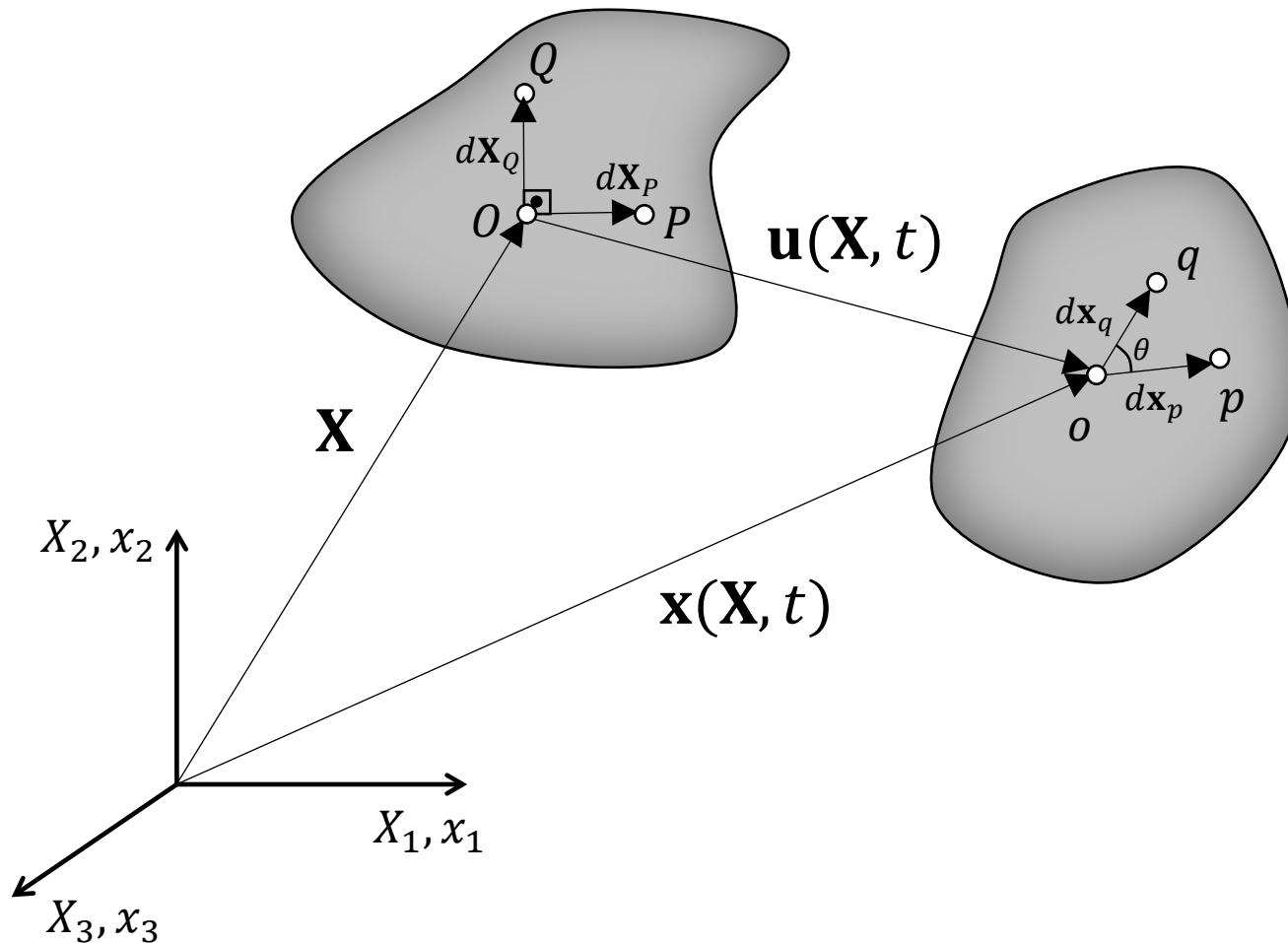
$$\frac{1}{2} (ds^2 - dS^2) = d\mathbf{X}^T \mathbf{E} d\mathbf{X}$$

$$\frac{1}{2} \frac{(ds^2 - dS^2)}{dS^2} = \frac{d\mathbf{X}}{dS} \cdot \mathbf{E} \frac{d\mathbf{X}}{dS}$$

$$\frac{1}{2} \frac{(ds^2 - dS^2)}{dS^2} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{E} \mathbf{N}$$



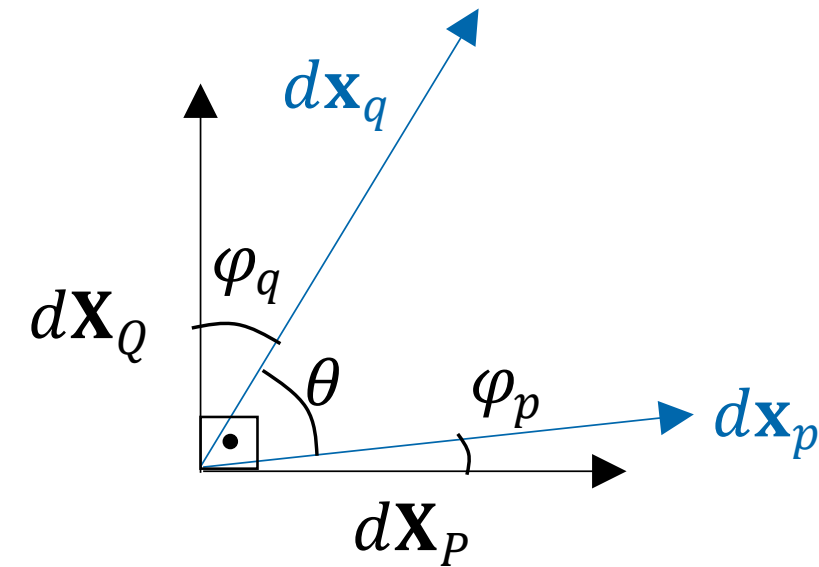
Interpretació física de la deformació de cisallament de Green :



$$\|d\mathbf{x}_p\| \|d\mathbf{x}_q\| \cos \theta = d\mathbf{x}_p \cdot d\mathbf{x}_q$$

Interpretació física de la deformació de cisallament de Green:

$$\|d\mathbf{x}_p\| \|d\mathbf{x}_q\| \cos \theta = d\mathbf{x}_p \cdot d\mathbf{x}_q$$



$$\cos \theta = \frac{d\mathbf{x}_p \cdot d\mathbf{x}_q}{\|d\mathbf{x}_p\| \|d\mathbf{x}_q\|}$$

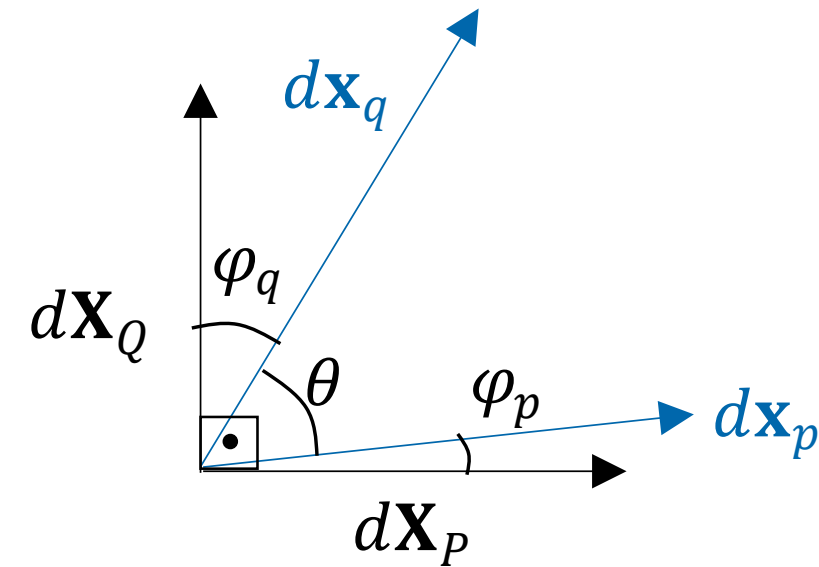
$$\cos \theta = \frac{(\mathbf{F}d\mathbf{X}_p) \cdot (\mathbf{F}d\mathbf{X}_q)}{\|d\mathbf{x}_p\| \|d\mathbf{x}_q\|}$$

$$\cos \theta = \frac{(\mathbf{F}d\mathbf{X}_p)^T (\mathbf{F}d\mathbf{X}_q)}{\|d\mathbf{x}_p\| \|d\mathbf{x}_q\|}$$

$$\cos \theta = \frac{d\mathbf{X}_p^T \mathbf{F}^T \mathbf{F} d\mathbf{X}_q}{\|d\mathbf{x}_p\| \|d\mathbf{x}_q\|}$$

$$\cos \theta = \frac{d\mathbf{X}_p^T \mathbf{C} d\mathbf{X}_q}{\|d\mathbf{x}_p\| \|d\mathbf{x}_q\|}$$

Interpretação física de la deformació cisalhante de Green:

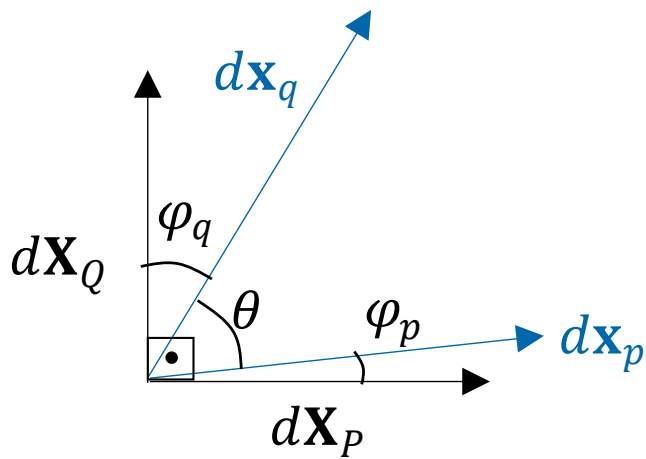


$$\cos \theta = \frac{d\mathbf{X}_p^T \mathbf{C} d\mathbf{X}_q}{\|d\mathbf{x}_p\| \|d\mathbf{x}_q\|}$$

$$\cos \theta = \frac{d\mathbf{X}_p^T \mathbf{C} d\mathbf{X}_q}{\sqrt{d\mathbf{x}_q \cdot d\mathbf{x}_q} \sqrt{d\mathbf{x}_p \cdot d\mathbf{x}_p}}$$

$$\cos \theta = \frac{d\mathbf{X}_p^T \mathbf{C} d\mathbf{X}_q}{\sqrt{d\mathbf{X}_q \cdot \mathbf{C} d\mathbf{X}_q} \sqrt{d\mathbf{X}_p \cdot \mathbf{C} d\mathbf{X}_p}}$$

Interpretação física de la deformació cisalhante de Green:



$$\cos \theta = \frac{d\mathbf{X}_p^T \mathbf{C} d\mathbf{X}_q}{\sqrt{d\mathbf{X}_q \cdot \mathbf{C} d\mathbf{X}_q} \sqrt{d\mathbf{X}_p \cdot \mathbf{C} d\mathbf{X}_p}}$$

$$\cos \theta = \frac{\hat{\mathbf{E}}_1^T \mathbf{C} \hat{\mathbf{E}}_2 dX_P dX_Q}{\sqrt{\hat{\mathbf{E}}_2 \cdot \mathbf{C} \hat{\mathbf{E}}_2} \sqrt{\hat{\mathbf{E}}_1 \cdot \mathbf{C} \hat{\mathbf{E}}_1} dX_P dX_Q}$$

$$d\mathbf{X}_P = dX_P \hat{\mathbf{E}}_1$$

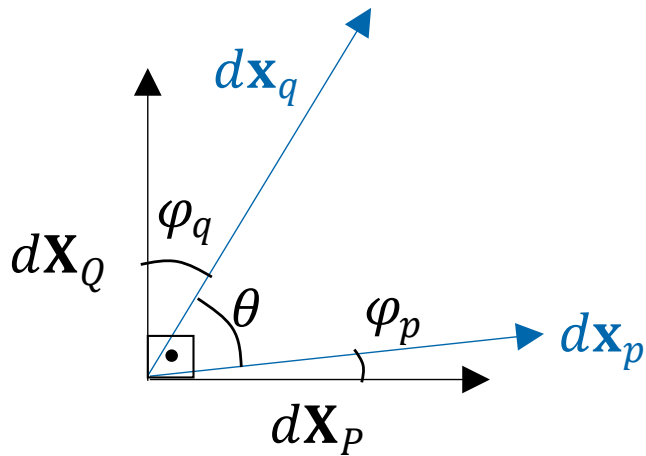
$$d\mathbf{X}_Q = dX_Q \hat{\mathbf{E}}_2$$

$$\cos \theta = \frac{C_{12}}{\sqrt{C_{22}} \sqrt{C_{11}}}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{C} = 2\mathbf{E} + \mathbf{I}$$

$$\cos \theta = \frac{2 E_{12}}{\sqrt{1 + 2E_{22}} \sqrt{1 + 2E_{11}}}$$

Interpretació física de la deformació cisalhante de Green:



$$\cos \theta = \frac{2 E_{12}}{\sqrt{1 + 2E_{22}}\sqrt{1 + 2E_{11}}}$$

$$\sin \gamma = \frac{2 E_{12}}{\sqrt{1 + 2E_{22}}\sqrt{1 + 2E_{11}}}$$

$$E_{12} = \frac{1}{2} \sqrt{1 + 2E_{22}}\sqrt{1 + 2E_{11}} \sin \gamma$$

$$\cos \theta = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$$

$$\gamma = \varphi_p + \varphi_q = \frac{\pi}{2} - \theta$$

$$\cos \theta = \sin \gamma$$

La deformació finita de cisallament E_{12} depèn tant de la distorsió angular (γ) com dels allargaments dels elements/fibres implicats.

$$(ds)^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}$$

$$d\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{x}$$

$$(dS)^2 = d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}$$

$$(dS)^2 = d\mathbf{x}^T \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{x}$$

$$(ds)^2 - (dS)^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}$$

$$(ds)^2 - (dS)^2 = d\mathbf{x} \mathbf{I} d\mathbf{x} - d\mathbf{x}^T \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{x}$$

$$(ds)^2 - (dS)^2 = d\mathbf{x}^T (\mathbf{I} - \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1}) d\mathbf{x}$$

$$(ds)^2 - (dS)^2 = 2 d\mathbf{x}^T \mathbf{e} d\mathbf{x}$$

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1})$$

Cinemàtica del continu

Tensor de deformacions infinitesimals i tensor de rotació

Quan el **gradient de desplaçaments** és petit, $\nabla \mathbf{u} \ll 1$ (és a dir, infinitesimal), els **termes quadràtics** de les components del tensor de deformació de Green es poden negligir.

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\nabla_0 \mathbf{u} + \nabla_0 \mathbf{u}^T + \nabla_0 \mathbf{u}^T \nabla_0 \mathbf{u})$$



$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$$

Observació: La interpretació física de les deformacions de cisallament es simplifica.

$$E_{12} = \frac{1}{2} \sqrt{(1 + 2E_{22})(1 + 2E_{11})} \sin \gamma_{12} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \sqrt{1 + 2E_{11} + 2E_{22} + 4E_{22}E_{11}} \sin \gamma_{12} \approx \frac{1}{2} \sin \gamma_{12}$$

$$\varepsilon_{12} \approx \frac{1}{2} \sin \gamma_{12} \approx \frac{1}{2} \tan \gamma_{12} \approx \frac{1}{2} \gamma_{12}$$

Interpretació física:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$$

$$\frac{1}{2} \frac{(ds^2 - dS^2)}{dS^2} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{E} \mathbf{N}$$



Com que les deformacions són petites: $ds + dS \approx 2dS$

$$\frac{2dS}{2dS} \frac{ds - dS}{dS} = \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{N}$$

$$\frac{1}{2} \frac{(ds + dS)(ds - dS)}{dS^2} = \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{N}$$

$$\frac{ds - dS}{dS} = \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{N}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$$

Notació científica

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

Notació d'enginyeria

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

Tot tensor de segon ordre es pot descompondre en un tensor simètric i un antisimètric:

$$\nabla \mathbf{u} = \underbrace{\frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)}_{\boldsymbol{\varepsilon}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}^T)}_{\boldsymbol{\Omega}} \quad \Rightarrow \quad \nabla \mathbf{u} = \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\Omega}$$

tensor de deformació infinitesimal tensor de rotació infinitesimal

Aquests tensors només tenen aquesta interpretació física quan les deformacions són infinitesimals, és a dir, $\|\nabla \mathbf{u}\| \ll 1$