

Tensions i equacions d'equilibri

Danilo Borges



danilo.borges@upc.edu

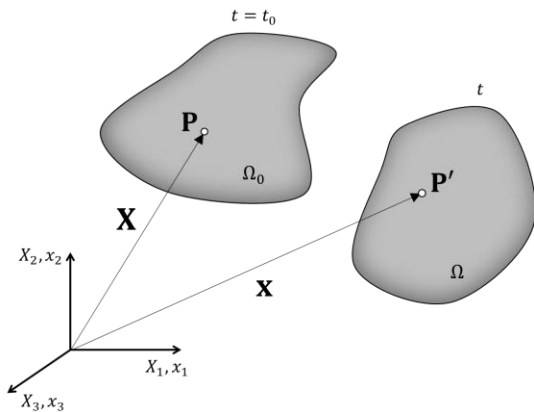


UNIVERSITAT POLITÈCNICA
DE CATALUNYA
BARCELONATECH

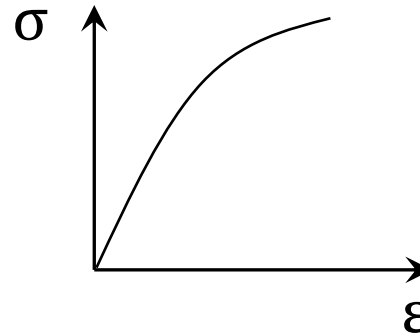
Teoria de l'elasticitat

Mar/2026

Relacions cinemàtiques



Relacions constitutives



Relacions de balanç (equilibri)

$$\sum F_i = 0$$

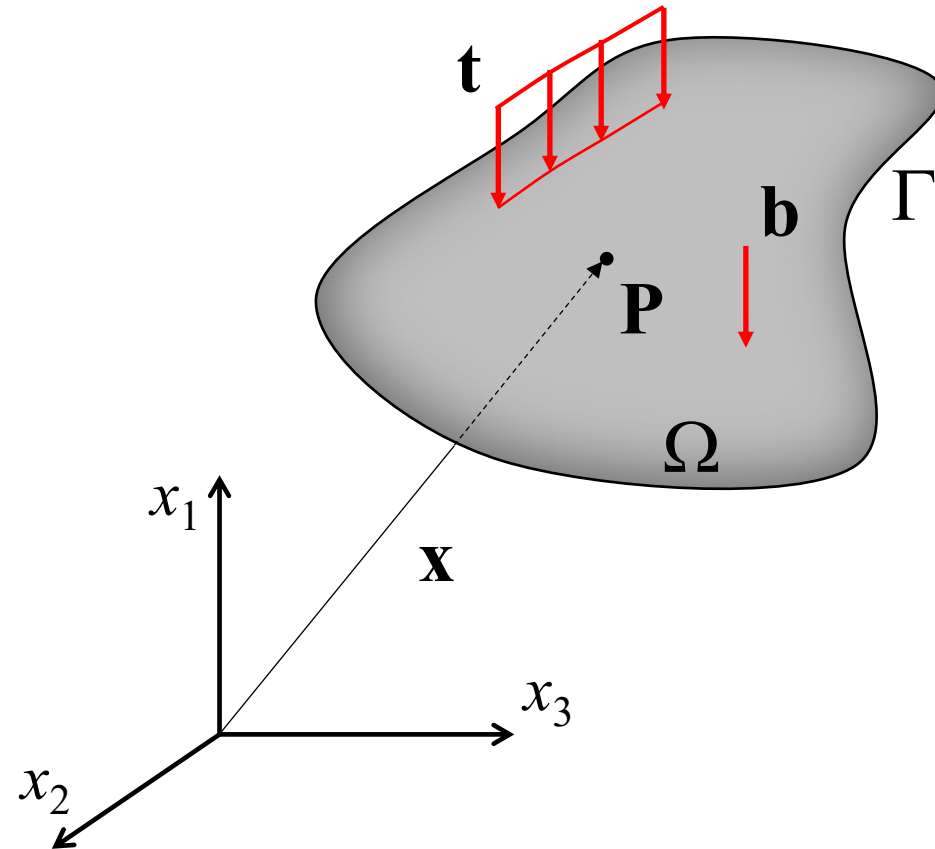
1. Vector tensió
2. Equacions d'equilibri
3. Tensor de tensions
4. Canvi de base i tensions principals
5. Estat Pla de Tensions

Tensions

Vector tensió

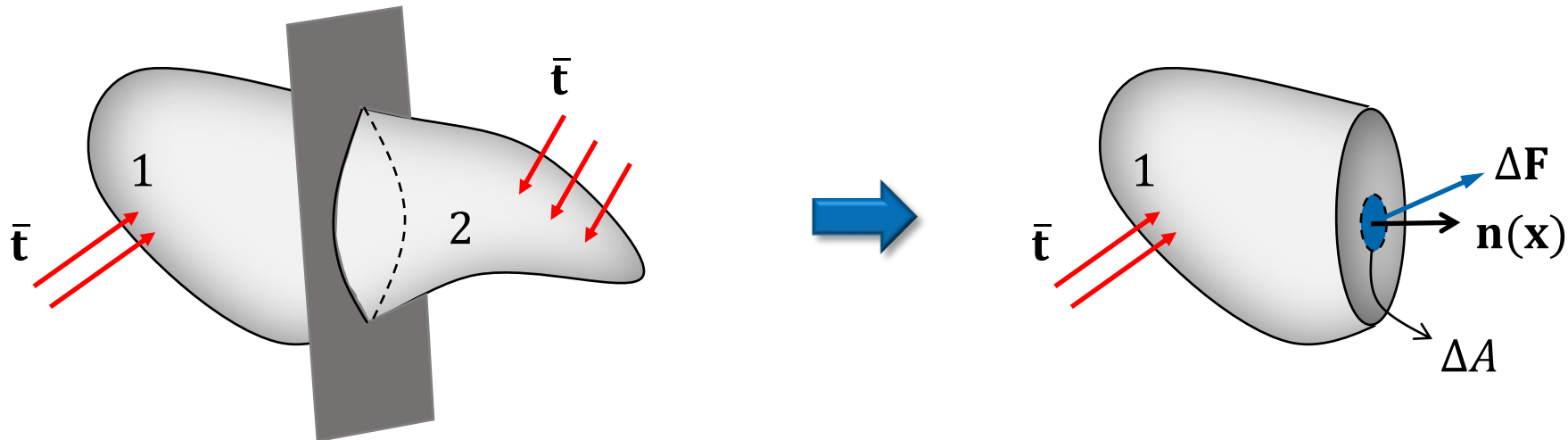
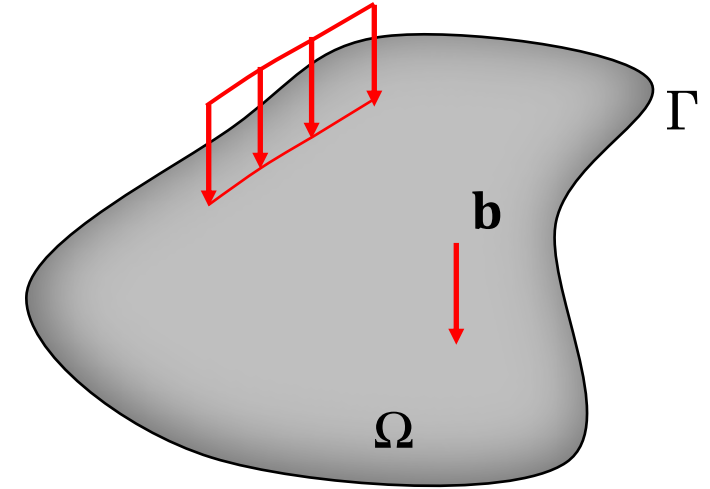
La necessitat d'establir una mesura de l'estat de sol·licitació interna d'un cos va portar a la creació dels conceptes:

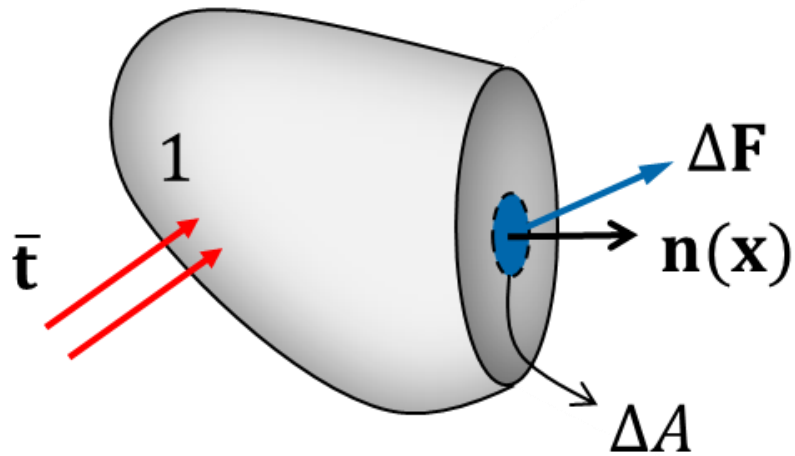
- Vector tensió;
- Tensor de tensions.



Tipus de sol·licitació

- Forces de contacte o de superfície: $\bar{\mathbf{t}}$
- Forces de cos o de camp: $\mathbf{b}$
- Forces de contacte o de superfície entre les diferents parts
 - Abstracció proposada inicialment per Cauchy





El vector tensió ($\mathbf{t}$) correspon a la tensió en un punt de coordenada $\mathbf{x}$, actuant sobre l'àrea la normal de la qual és $\mathbf{n}(\mathbf{x})$

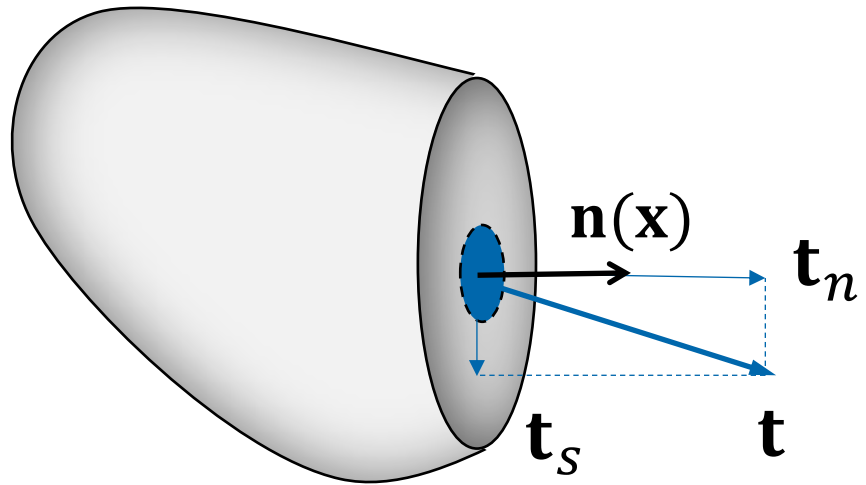
- $\mathbf{n}(\mathbf{x})$: vector normal unitari en un punt $\mathbf{x}$ d'aquesta superfície S generada pel tall;
- $\Delta \mathbf{F}$: força resultant que la part 2 exerceix sobre la part 1 en aquesta àrea. Aquesta resultant no és necessàriament paral·lela a $\mathbf{n}(\mathbf{x})$;

El vector tensió es defineix per:

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta A}$$

Component del vector tensió

El vector tensió es pot descompondre en 2 components:



1. Component normal a la superfície:

$$\mathbf{t}_n = (\mathbf{t} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$$

$$\|\mathbf{t}_n\| = \mathbf{t} \cdot \mathbf{n}$$

2. Component paral·lela a la superfície:

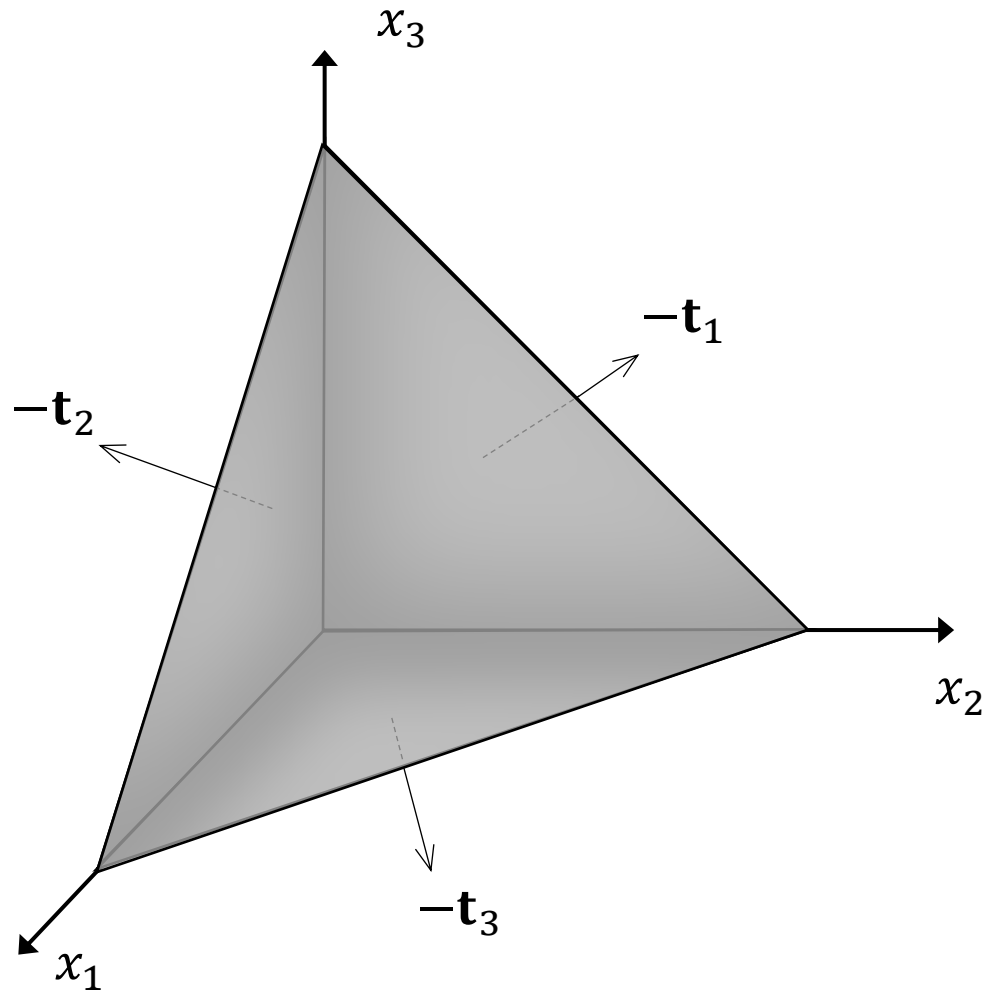
$$\mathbf{t}_s = \mathbf{t} - \mathbf{t}_n$$

$$\|\mathbf{t}_s\| = \sqrt{\|\mathbf{t}\|^2 - \|\mathbf{t}_n\|^2}$$

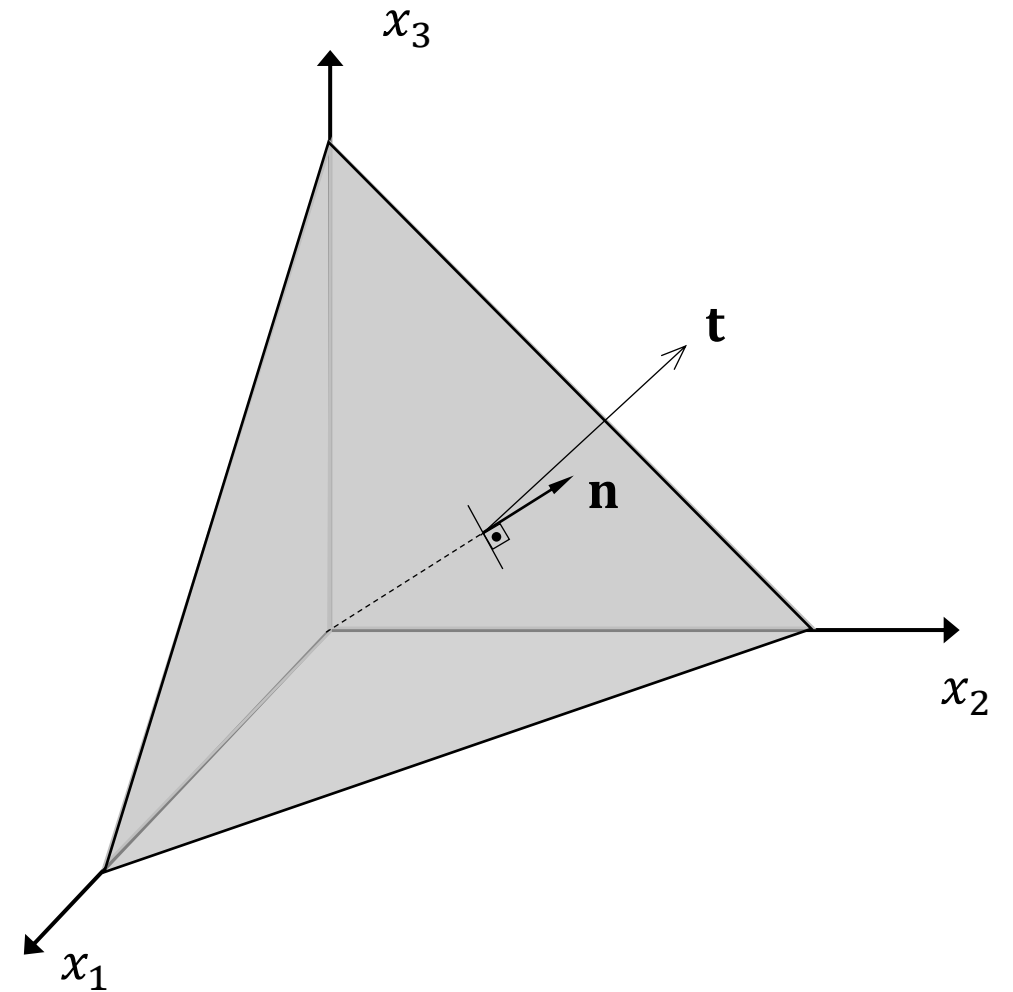
Tensions

Equacions d'equilibri

Cares externes:

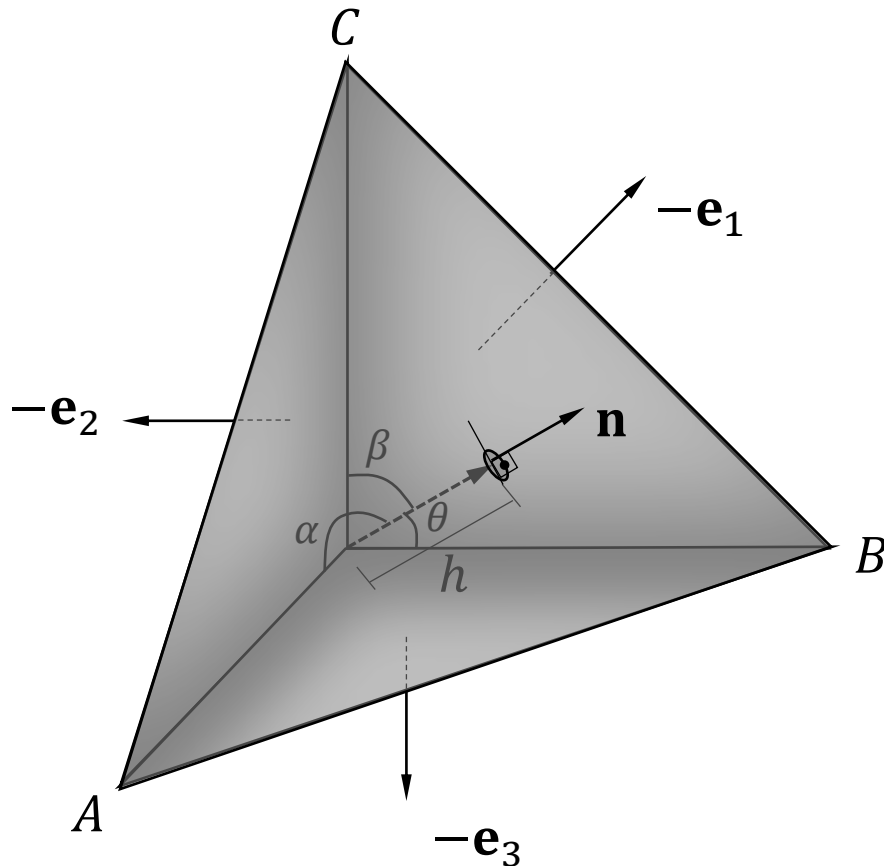


Cara del tall:



Volum del tetraedre

$$\mathbf{n} = [n_1 \quad n_2 \quad n_3]^T$$

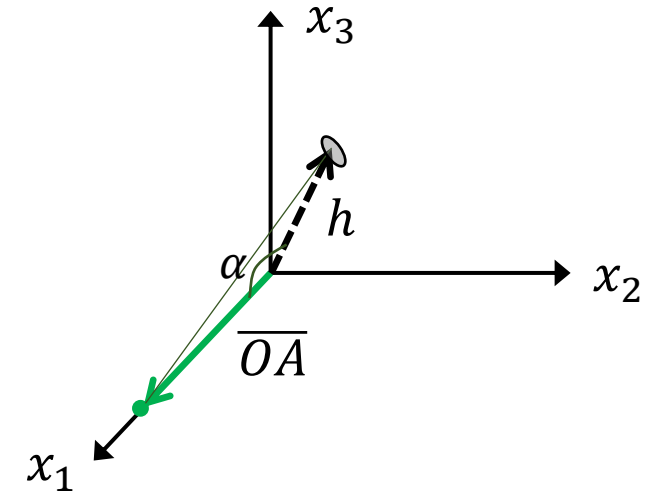


Altura del tetraedre:

$$h = \overline{OA} \cos \alpha = \overline{OA} n_1$$

$$h = \overline{OB} \cos \theta = \overline{OB} n_2$$

$$h = \overline{OC} \cos \beta = \overline{OC} n_3$$

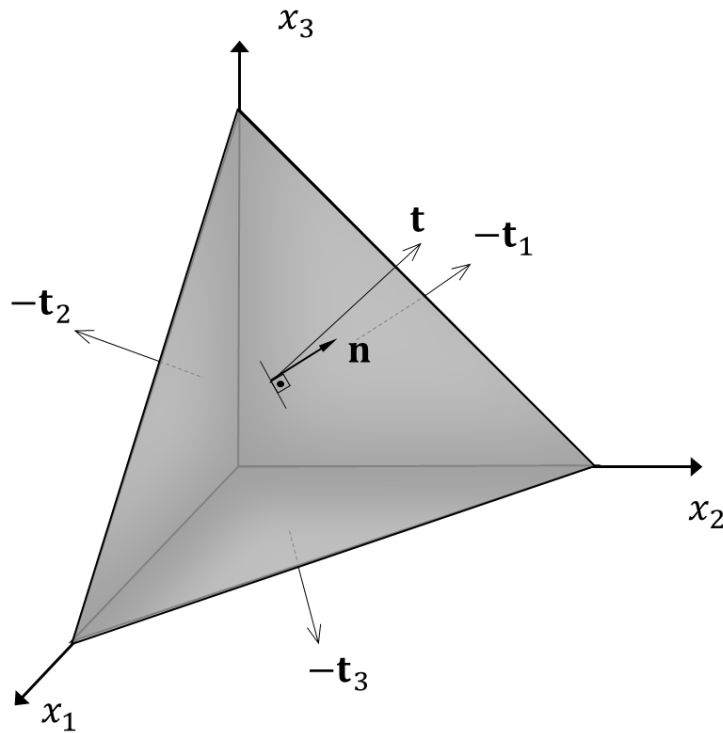


Volum:

$$V = \frac{1}{3} h A = \frac{1}{3} \overline{OA} A_1 \Rightarrow \overline{OA} n_1 A = \overline{OA} A_1 \Rightarrow A_1 = n_1 A$$

$$V = \frac{1}{3} h A = \frac{1}{3} \overline{OB} A_2 \Rightarrow \overline{OB} n_2 A = \overline{OB} A_2 \Rightarrow A_2 = n_2 A$$

$$V = \frac{1}{3} h A = \frac{1}{3} \overline{OC} A_3 \Rightarrow \overline{OC} n_3 A = \overline{OC} A_3 \Rightarrow A_3 = n_3 A$$



$$\sum F = m a: \quad \int_{\Gamma} \mathbf{t} d\Gamma + \int_V \mathbf{b} dV = \int_V \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV$$

$$\underbrace{\int_{A_1} (-\mathbf{t}_1) dA + \int_{A_2} (-\mathbf{t}_2) dA + \int_{A_3} (-\mathbf{t}_3) dA + \int_A \mathbf{t} dA}_{\text{Forces de superfície}} + \underbrace{\int_V \mathbf{b} dV}_{\text{Forces de cos}} = \underbrace{\int_V \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV}_{\text{Força inercial}}$$

Forces de
superfície

Forces de
cos

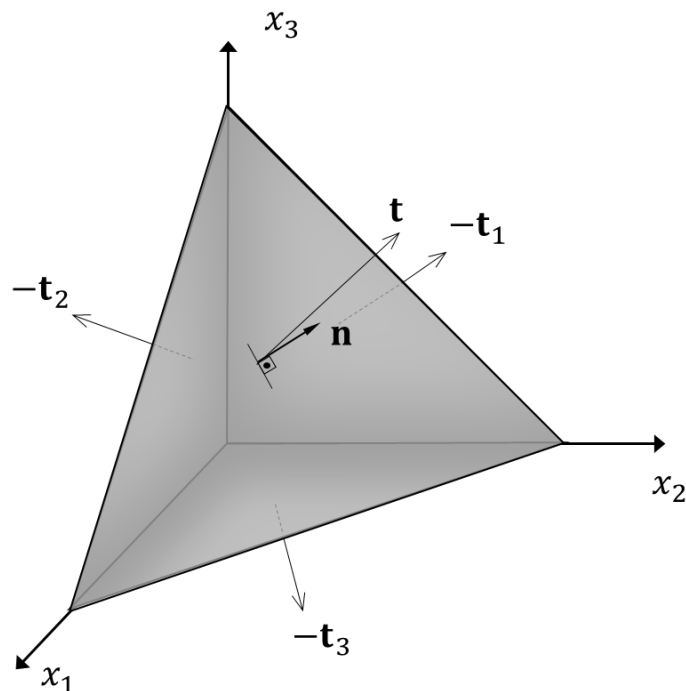
Força
inercial

Pel teorema del valor mitjà:

$$\int_{A_i} (-\mathbf{t}_i) dA = -A_i \mathbf{t}_i(\mathbf{x}_i)$$

$$\int_A \mathbf{t} dA = A \mathbf{t}(\mathbf{x}_n)$$

$$\int_V \mathbf{b} dV = V \mathbf{b}(\mathbf{x}_b)$$



Com que és un element infinitesimal:

$$V \rightarrow 0$$

$$h \rightarrow 0$$

$$\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_n, \mathbf{x}_b \rightarrow \mathbf{x}$$

$$\int_{A_1} (-\mathbf{t}_1) dA + \int_{A_2} (-\mathbf{t}_2) dA + \int_{A_3} (-\mathbf{t}_3) dA + \int_A \mathbf{t} dA + \int_V \mathbf{b} dV = \int_V \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV$$

$$-A_1 \mathbf{t}_1(\mathbf{x}_1) - A_2 \mathbf{t}_2(\mathbf{x}_2) - A_3 \mathbf{t}_3(\mathbf{x}_3) + A \mathbf{t}(\mathbf{x}_n) + V \mathbf{b}(\mathbf{x}_b) = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} V$$

$$-A n_1 \mathbf{t}_1(\mathbf{x}_1) - A n_2 \mathbf{t}_2(\mathbf{x}_2) - A n_3 \mathbf{t}_3(\mathbf{x}_3) + A \mathbf{t}(\mathbf{x}_n) + V \mathbf{b}(\mathbf{x}_b) = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} V$$

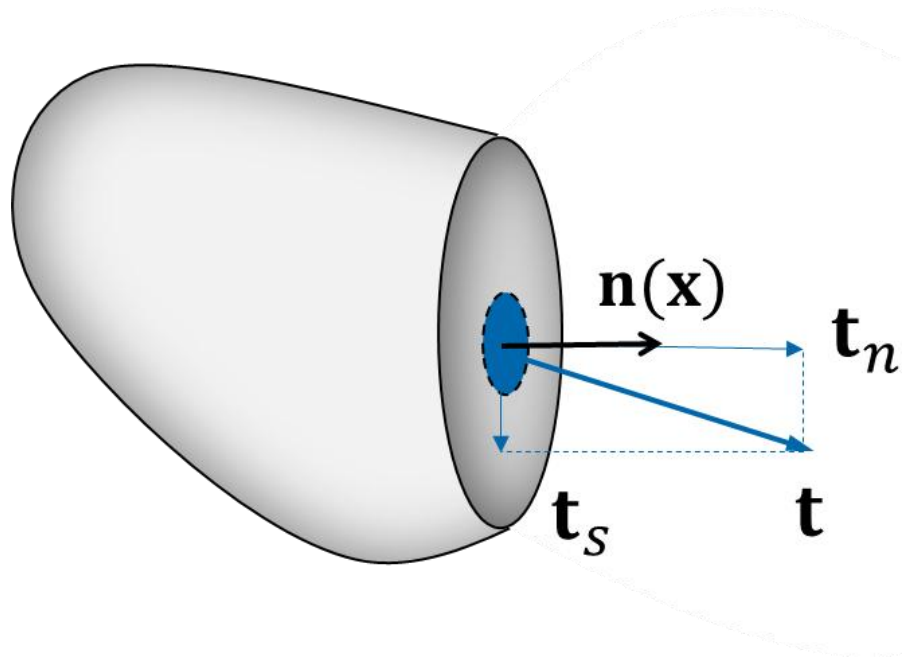
$$-n_1 \mathbf{t}_1(\mathbf{x}_1) - n_2 \mathbf{t}_2(\mathbf{x}_2) - n_3 \mathbf{t}_3(\mathbf{x}_3) + \mathbf{t}(\mathbf{x}_n) + \frac{h}{3} \mathbf{b}(\mathbf{x}_b) = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \frac{h}{3}$$

$$-n_1 \mathbf{t}_1(\mathbf{x}) - n_2 \mathbf{t}_2(\mathbf{x}) - n_3 \mathbf{t}_3(\mathbf{x}) + \mathbf{t}(\mathbf{x}) = 0$$

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}) = n_1 \mathbf{t}_1(\mathbf{x}) + n_2 \mathbf{t}_2(\mathbf{x}) + n_3 \mathbf{t}_3(\mathbf{x})$$

Tensions

Tensor de tensions



$$\mathbf{t}_n = (\mathbf{t} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$$

$$\mathbf{t}_s = \mathbf{t} - \mathbf{t}_n$$

- En un mateix punt del cos, de coordenada $\mathbf{x}$, si es modifica l'inclinació (la normal $\mathbf{n}$), el vector $\mathbf{t}(\mathbf{x})$ també canvia.
- $\mathbf{t}$ varia linealment amb $\mathbf{n}$;
 - Existeix una transformació lineal del vector $\mathbf{n}$ que dona el vector $\mathbf{t}$.
 - Aquesta transformació lineal defineix el tensor de tensions.

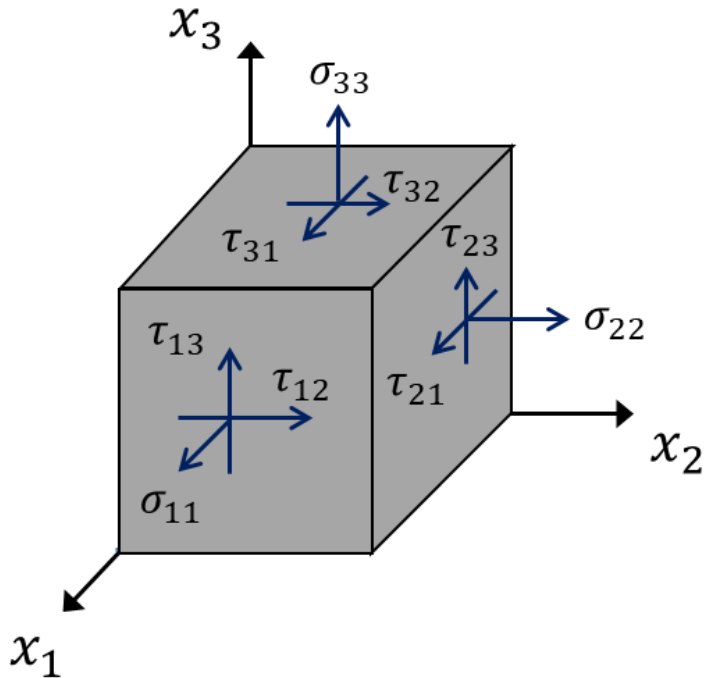
Equació d'equilibri: $\mathbf{t}(\mathbf{x}) = n_1 \mathbf{t}_1(\mathbf{x}) + n_2 \mathbf{t}_2(\mathbf{x}) + n_3 \mathbf{t}_3(\mathbf{x})$

Els vectors de tensió, en termes de les components en el sistema cartesià, es defineixen per:

$$\mathbf{t}_1 = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{t}_2 = \begin{Bmatrix} \sigma_{21} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{t}_3 = \begin{Bmatrix} \sigma_{31} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{33} \end{Bmatrix}$$



Podem reescriure l'equació d'equilibri com

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix}$$

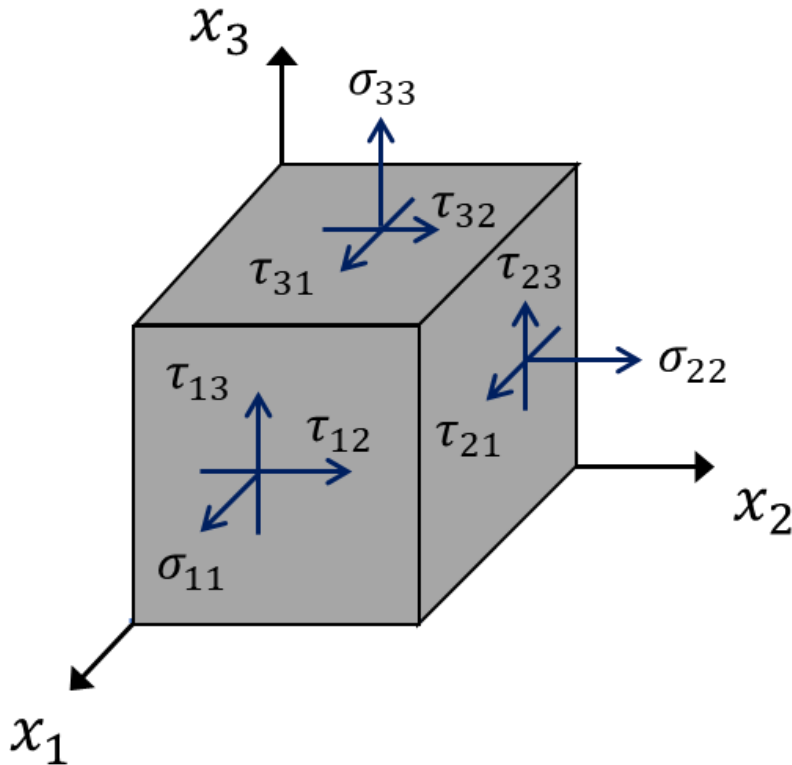


$$\mathbf{t}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n}$$



Tensor de tensions
de Cauchy

Les components del tensor de tensions s'obtenen fent: $\boldsymbol{\sigma}^T = \mathbf{t}_i \otimes \mathbf{e}_i$

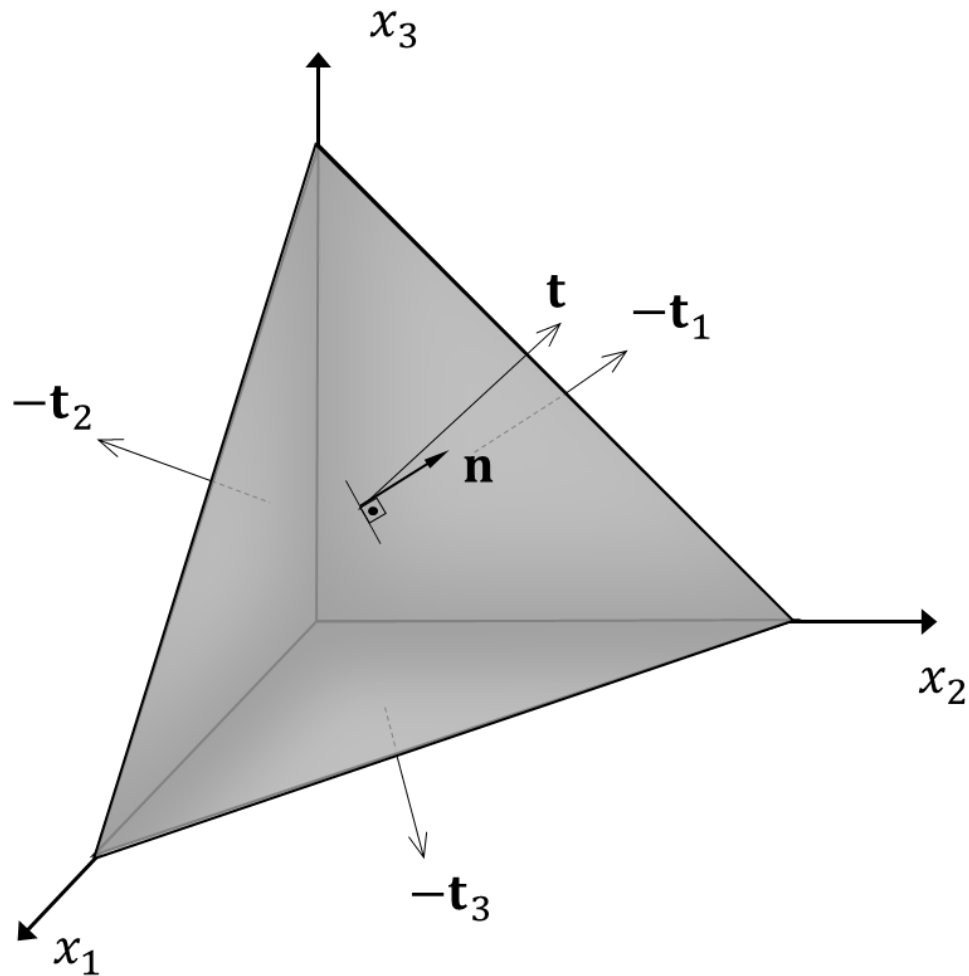


$$\boldsymbol{\sigma}^T = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix} \{1 \ 0 \ 0\} + \begin{Bmatrix} \sigma_{21} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} \{0 \ 1 \ 0\} + \begin{Bmatrix} \sigma_{31} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{33} \end{Bmatrix} \{0 \ 0 \ 1\}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ \sigma_{13} & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \sigma_{21} & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & \sigma_{23} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sigma_{31} \\ 0 & 0 & \sigma_{32} \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

Propietat important: $\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{e}_j = (\mathbf{t}_i \otimes \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_j = \mathbf{t}_i \mathbf{e}_i^T \mathbf{e}_j = \mathbf{t}_i \delta_{ij} = \mathbf{t}_j$

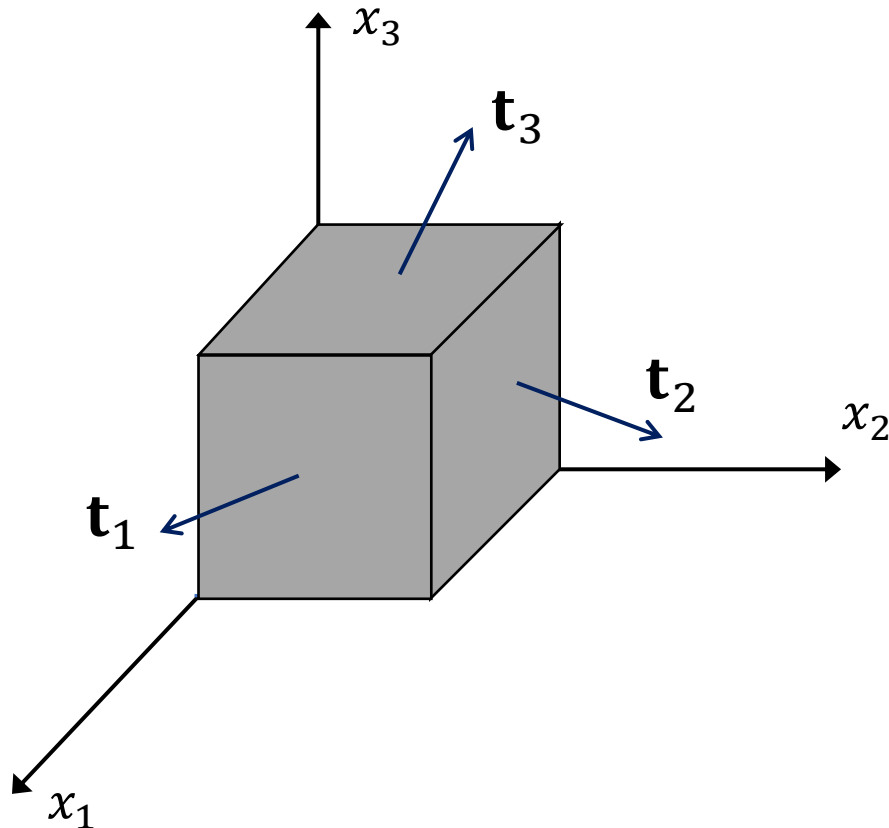


$$\mathbf{t}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n}$$

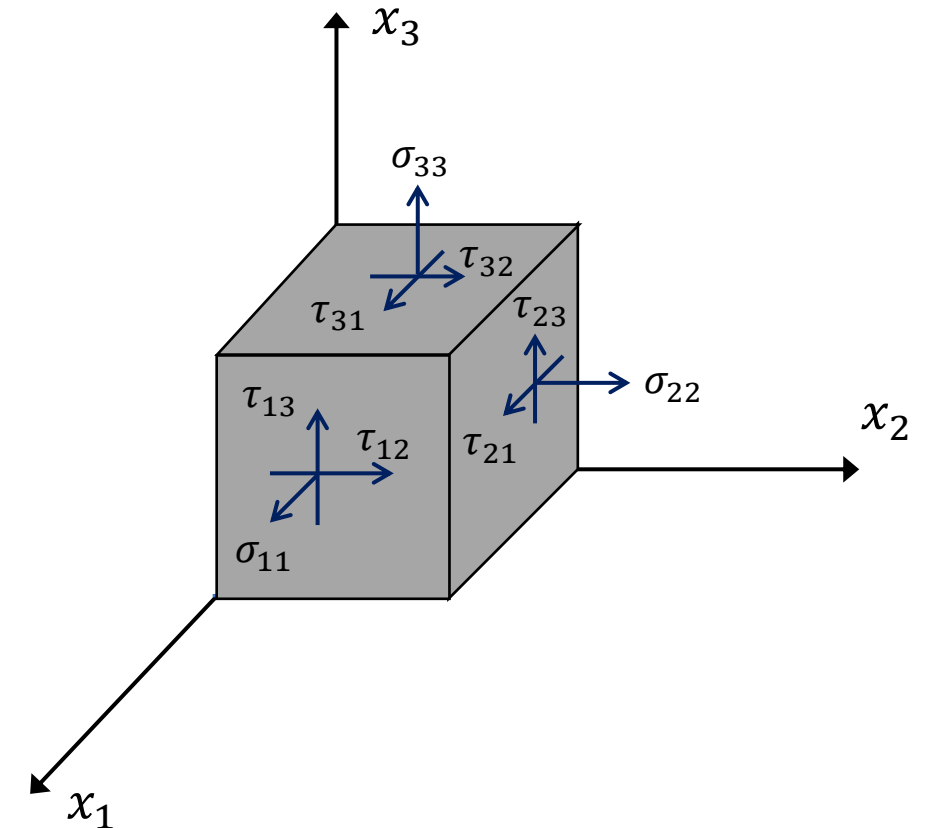
- El tensor $\boldsymbol{\sigma}$, anomenat tensor de tensions de Cauchy, té la propietat que, quan opera sobre un vector normal a un pla de tall, dona el vector tensió que actua en aquest pla.
- També és vàlid per a problemes dinàmics, ja que el terme d'inèrcia va desaparèixer de manera natural, igual que el terme associat a les forces de cos.

Tensor de tensions

Prenent un punt $\mathbf{x}$ d'un cos, fem 3 talls paral·lels als plans cartesianes. A cada cara actua un vector tensió ($\mathbf{t}_1$, $\mathbf{t}_2$ e $\mathbf{t}_3$):

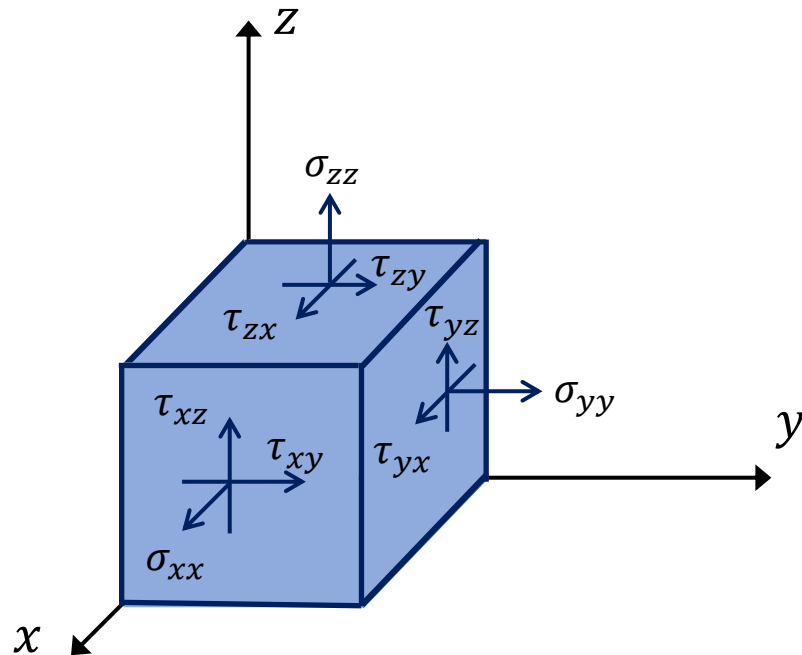


Cada vector tensió ($\mathbf{t}_i$) té 3 components en les direccions cartesianes:



Superfícies “positives”

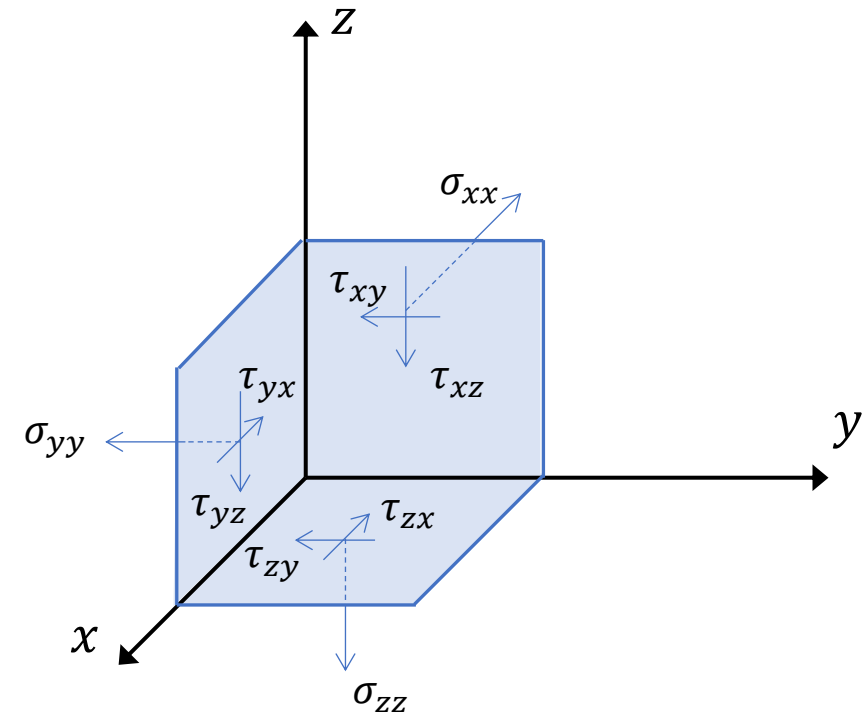
La normal de la superfície apunta en la direcció positiva del sistema cartesià



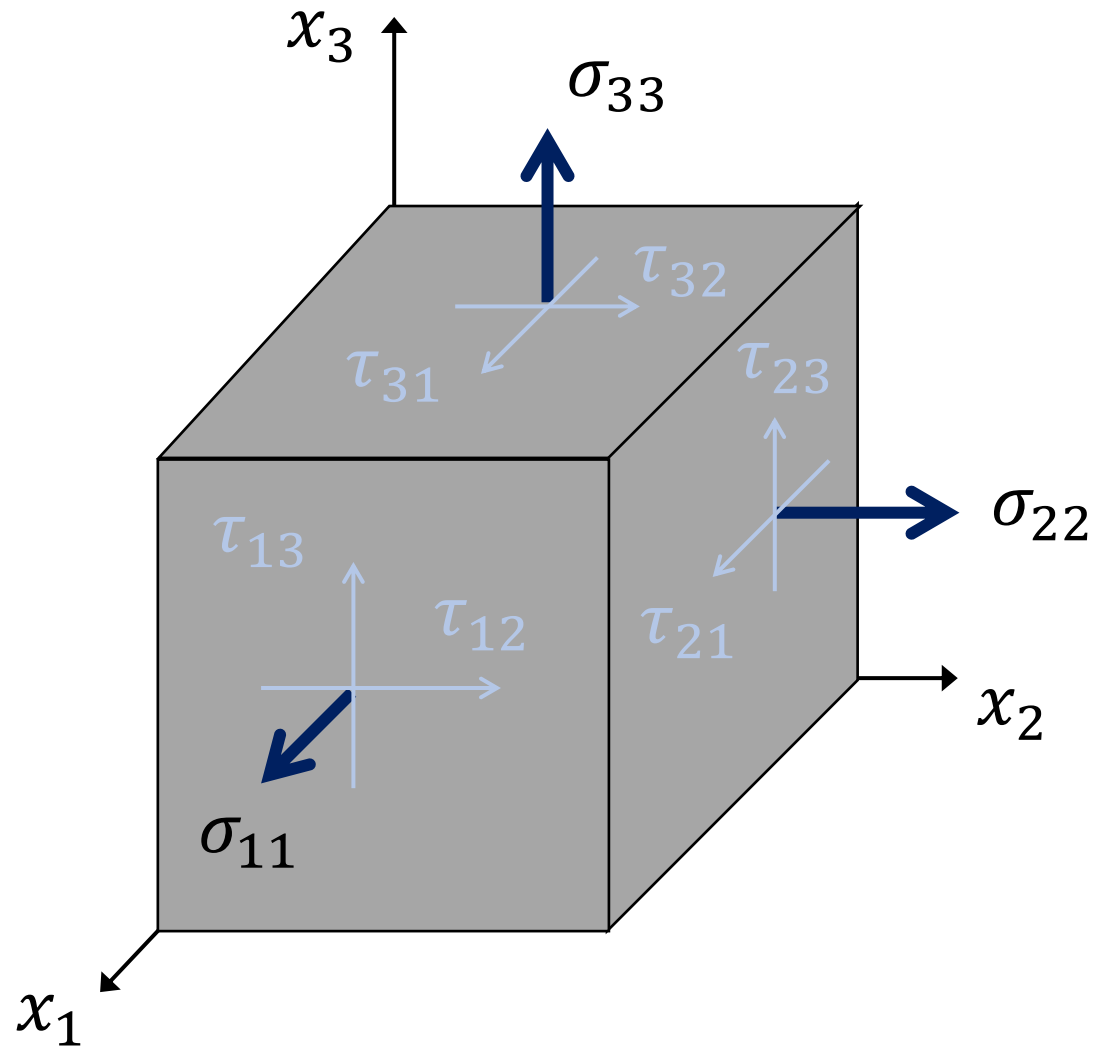
Les tensions que actuen en la direcció positiva de les coordenades són positives

Superfícies “negatives”

La normal de la superfície apunta en la direcció negativa del sistema cartesià



Les tensions que actuen en la direcció negativa de les coordenades són positives



Components normals

El signe té significat físic:

$\sigma_i > 0 \rightarrow$ Tracció

$\sigma_i < 0 \rightarrow$ Compensió

Per equilibri de forces:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{t} \, d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{b} \, d\Omega = \int_{\Omega} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \, d\Omega \quad \Rightarrow \quad \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n} \, d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{b} \, d\Omega = \int_{\Omega} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \, d\Omega$$

Pel teorema de la divergència:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}^T) \, dV + \int_{\Omega} \mathbf{b} \, d\Omega = \int_{\Omega} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \, d\Omega \quad \Rightarrow \quad \int_{\Omega} \left(\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^T + \mathbf{b} - \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) d\Omega = 0$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^T + \mathbf{b} - \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0$$

Per equilibri de moments:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{x} \times \mathbf{t} d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{x} \times \mathbf{b} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{x} \times \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} d\Omega$$

↓ $\mathbf{t}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n}$

$$\int_{\Gamma} \mathbf{x} \times \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{x} \times \mathbf{b} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{x} \times \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} d\Omega$$

↓ Notació indicial

$$\int_{\Gamma} e_{ijk} x_j \sigma_{lk} n_l d\Gamma + \int_{\Omega} e_{ijk} x_j b_k d\Omega = \int_{\Omega} e_{ijk} x_j \rho \frac{dv_k}{dt} d\Omega$$

↓ Teorema de la divergència

$$\int_{\Omega} (e_{ijk} x_j \sigma_{lk})_{,l} d\Omega + \int_{\Omega} e_{ijk} x_j b_k d\Omega = \int_{\Omega} e_{ijk} x_j \rho \frac{dv_k}{dt} d\Omega$$

↓ Regla de la cadena

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} e_{ijk} x_{j,l} \sigma_{lk} d\Omega + \int_{\Omega} e_{ijk} x_j \sigma_{lk,l} d\Omega + \int_{\Omega} e_{ijk} x_j b_k d\Omega \\ &= \int_{\Omega} e_{ijk} x_j \rho \frac{dv_k}{dt} d\Omega \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega} e_{ijk} x_{j,l} \sigma_{lk} d\Omega + \int_{\Omega} e_{ijk} x_j \sigma_{lk,l} d\Omega + \int_{\Omega} e_{ijk} x_j b_k d\Omega = \int_{\Omega} e_{ijk} x_j \rho \frac{dv_k}{dt} d\Omega$$



$$\int_{\Omega} e_{ijk} x_{j,l} \sigma_{lk} d\Omega + \int_{\Omega} \left(e_{ijk} x_j \sigma_{lk,l} + e_{ijk} x_j b_k - e_{ijk} x_j \rho \frac{dv_k}{dt} \right) d\Omega = 0$$



$$\int_{\Omega} e_{ijk} x_{j,l} \sigma_{lk} d\Omega + \int_{\Omega} e_{ijk} x_j \left(\sigma_{lk,l} + b_k - \rho \frac{dv_k}{dt} \right) d\Omega = 0$$



Considerant l'equació de moviment

$$\int_{\Omega} e_{ijk} x_{j,l} \sigma_{lk} d\Omega = 0$$



$$x_{j,l} = \delta_{jl}$$

$$\int_{\Omega} e_{ijk} \delta_{jl} \sigma_{lk} d\Omega = 0$$



$$\sigma_{lk} \delta_{jl} = \sigma_{jk}$$

$$\int_{\Omega} e_{ijk} \sigma_{jk} d\Omega = 0$$



$$e_{ijk} \sigma_{jk} = 0$$



$$\begin{cases} k = 1: \sigma_{23} - \sigma_{32} = 0 \\ k = 2: \sigma_{31} - \sigma_{13} = 0 \\ k = 3: \sigma_{12} - \sigma_{21} = 0 \end{cases}$$



$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

Tensions

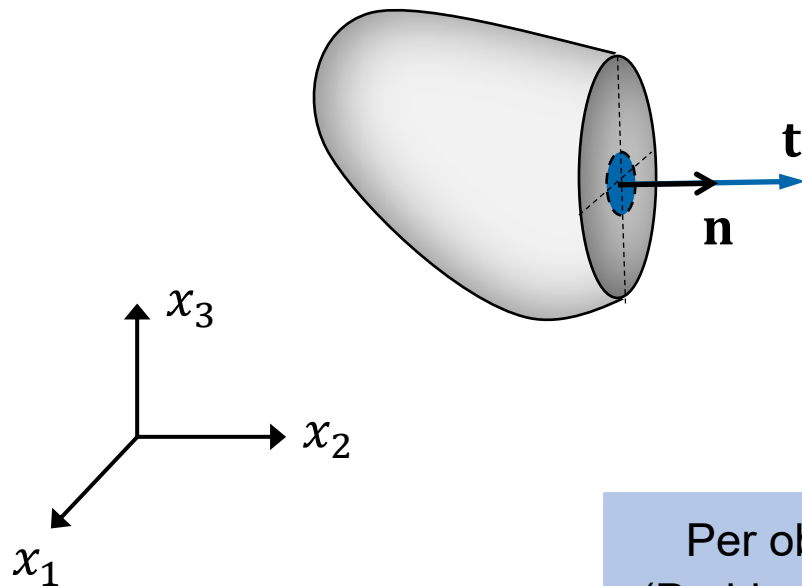
Canvi de base i tensions principals

Admetent dues bases vectorials: $\langle \mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_3 \rangle$ $\langle \bar{\mathbf{e}}_1 \ \bar{\mathbf{e}}_2 \ \bar{\mathbf{e}}_3 \rangle$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{t}} &= \bar{\boldsymbol{\sigma}} \bar{\mathbf{n}} && \rightarrow && \mathbf{R} \mathbf{t} = \bar{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{R} \mathbf{n} \\ &&& && \downarrow \\ &&& && \mathbf{R}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{t} = \mathbf{R}^{-1} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{R} \mathbf{n} \\ &&& && \downarrow \\ &&& && \mathbf{t} = \mathbf{R}^{-1} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{R} \mathbf{n} \\ &&& && \downarrow \text{Matriu ortogonal} \\ &&& && \mathbf{t} = \mathbf{R}^T \bar{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{R} \mathbf{n} \\ &&& && \downarrow \\ &&& && \boxed{\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{R}^T \bar{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{R}} \end{aligned}$$

Tensions principals

Donat un punt de coordenada $\mathbf{x}$ al cos, serà possible identificar un pla de tall que passi per aquest punt, amb normal $\mathbf{n}$, de manera que aquest pla només tingui tensions normals?



$$\mathbf{t} = \sigma \mathbf{n} + \tau \mathbf{c}$$



$$\mathbf{t} = \sigma \mathbf{n}$$

$$\sigma \mathbf{n} = \sigma \mathbf{n}$$

$$\sigma \mathbf{n} = \sigma \mathbf{I} \mathbf{n}$$

$$(\sigma - \sigma \mathbf{I}) \mathbf{n} = \mathbf{0}$$

$$\det(\sigma - \sigma \mathbf{I}) = 0$$

Per obtenir una solució no trivial:
(Problema d'autovalors i autovectors)

Equació característica:

$$\det(\boldsymbol{\sigma} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0$$

$$I_1 = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{ii}$$

$$I_2 = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma} - \text{tr}(\boldsymbol{\sigma})^2) = \frac{1}{2} (\sigma_{ij} \sigma_{ji} - \sigma_{ii} \sigma_{jj})$$

$$I_3 = \det(\boldsymbol{\sigma})$$

- ➡ Les arrels de l'equació característica donen els autovalors: les tensions principals.
- ➡ Cadascuna de les tensions principals està associada a una direcció principal: $\mathbf{n}^1$, $\mathbf{n}^2$ e $\mathbf{n}^3$.

➤ Començant per $\mathbf{n}^1$;

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma_1 & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \sigma_1 & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} - \sigma_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1^1 \\ n_2^1 \\ n_3^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow$$

Com que el sistema és singular, s'hi afegeix una equació:

$$(n_1^1)^2 + (n_2^1)^2 + (n_3^1)^2 = 1$$

El vector ha de tenir norma unitària.

➤ Es repeteix el procés per a $\mathbf{n}^2$;

➤ $\mathbf{n}^3 = \mathbf{n}^1 \times \mathbf{n}^2$;

Tensions esfèriques i desviatòries

Donat un tensor arbitrari, el podem descompondre en dos tensors amb característiques físiques particulars:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^e + \boldsymbol{\sigma}^d \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix}}_{\text{Tensor esfèric o hidrostàtic}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma_m & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \sigma_m & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} - \sigma_m \end{bmatrix}}_{\text{Tensor desviatòric}}$$

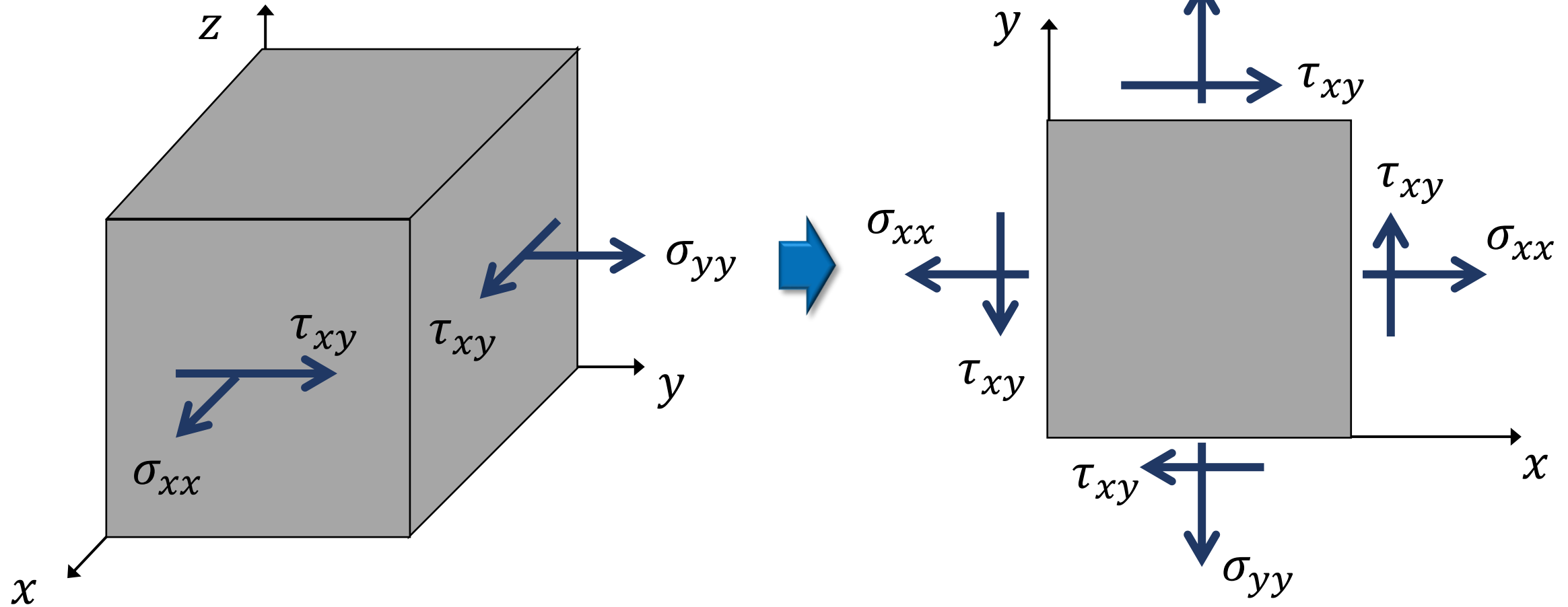
Tensió mitjana: $\sigma_m = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} = \frac{I_1}{3}$

Aquesta descomposició té com a objectiu identificar accions de naturalesa físicament diferent que estan relacionades amb característiques de resistència dels materials també diferents. Per exemple, alguns materials tenen la fallada associada a esforços normals (relació amb les tensions esfèriques) i d'altres, associada a esforços de cisallament (relació amb les tensions desviatòries).

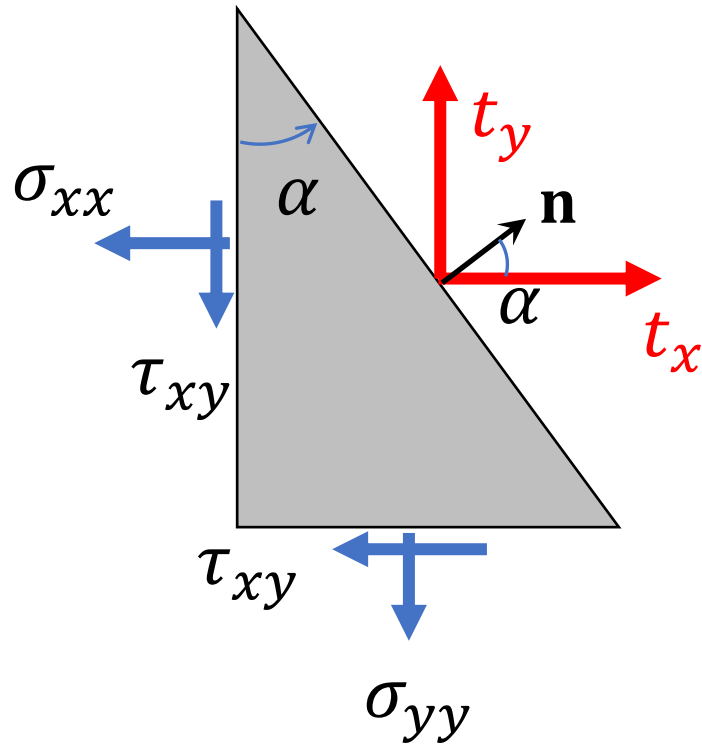
Tensions

Estat Pla de Tensions

$$\sigma_{zz}, \tau_{xz}, \tau_{yz} = 0$$



$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n}$$



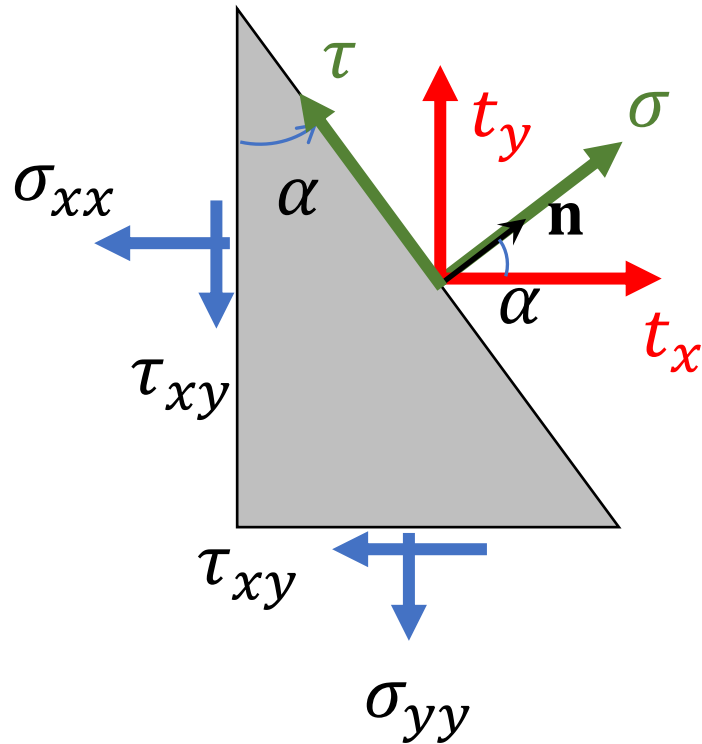
$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \cos \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha \\ \tau_{xy} \cos \alpha + \sigma_{yy} \sin \alpha \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \cos \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha \\ \tau_{xy} \cos \alpha + \sigma_{yy} \sin \alpha \end{Bmatrix}$$



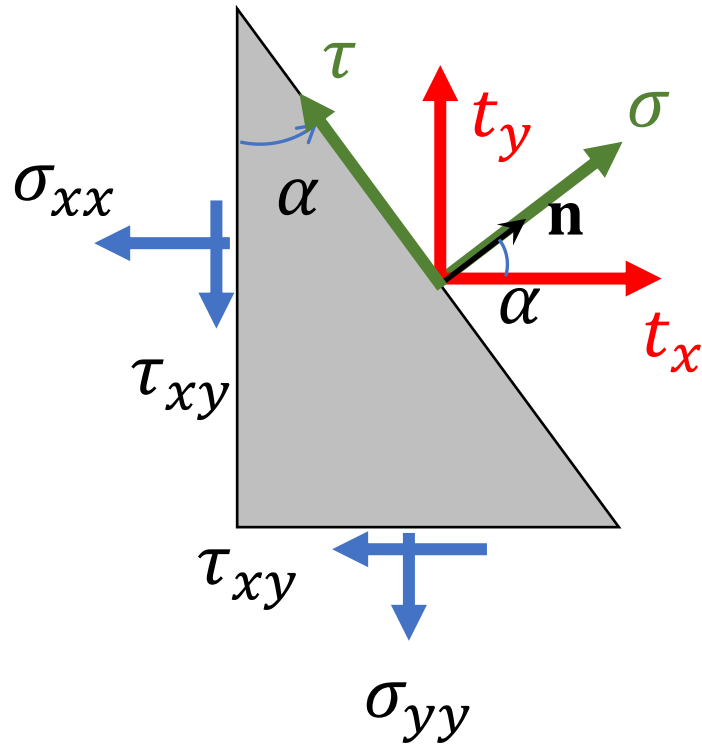
La matriu de rotació és:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma \\ \tau \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma \\ \tau \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos \alpha t_x + \sin \alpha t_y \\ -\sin \alpha t_x + \cos \alpha t_y \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma \\ \tau \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \cos^2 \alpha + \sigma_{yy} \sin^2 \alpha + 2 \tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \\ \tau_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + (\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) \sin \alpha \cos \alpha \end{Bmatrix}$$



$$\begin{Bmatrix} \sigma \\ \tau \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \cos^2 \alpha + \sigma_{yy} \sin^2 \alpha + 2 \tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \\ \tau_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + (\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) \sin \alpha \cos \alpha \end{Bmatrix}$$

Utilitzant les identitats trigonomètriques:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$



$$\sigma = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha$$

$$\tau = -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha$$

$$\sigma - \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} = \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha$$

$$\tau = -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha$$



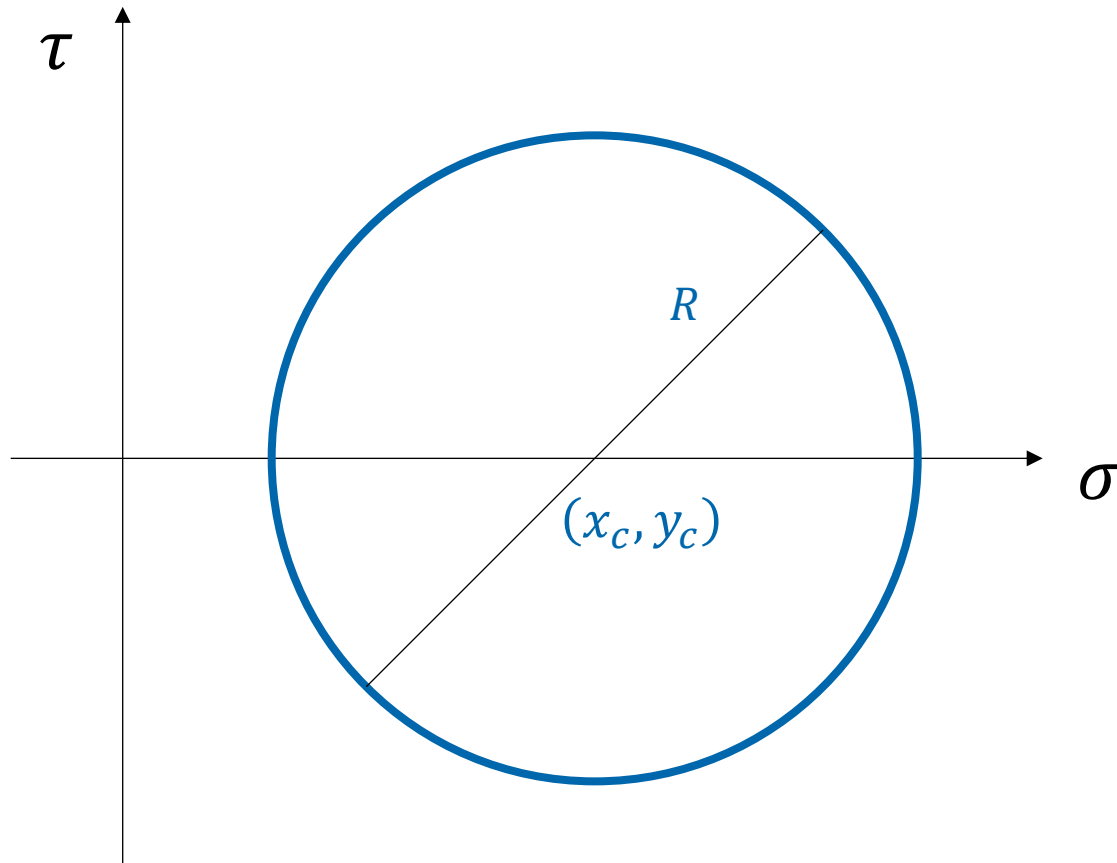
$$\left(\sigma - \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \right)^2 = \left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right)^2 \cos^2 2\alpha + \tau_{xy}^2 \sin^2 2\alpha + \tau_{xy} (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \sin 2\alpha \cos 2\alpha$$

+

$$\tau^2 = \left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right)^2 \sin^2 2\alpha + \tau_{xy}^2 \cos^2 2\alpha - \tau_{xy} (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \sin 2\alpha \cos 2\alpha$$

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2$$

Equació d'un cercle: $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2$



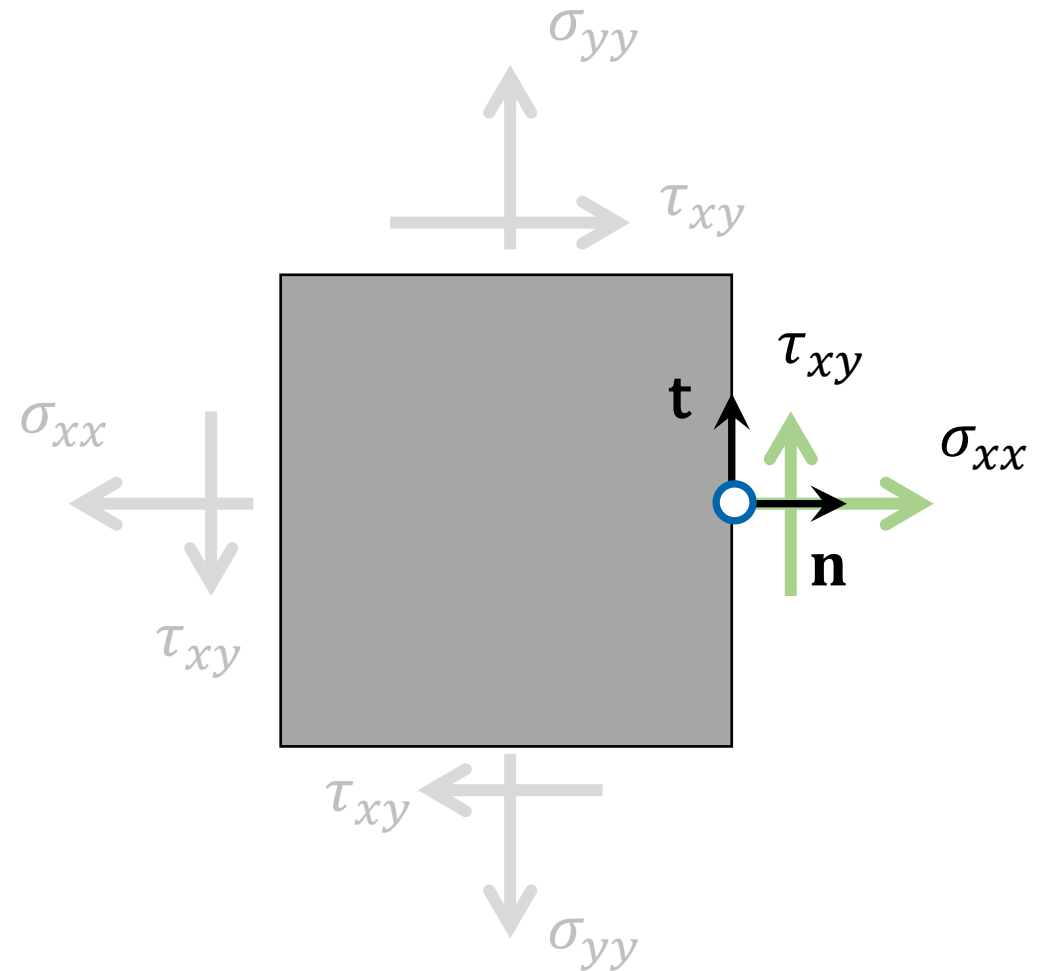
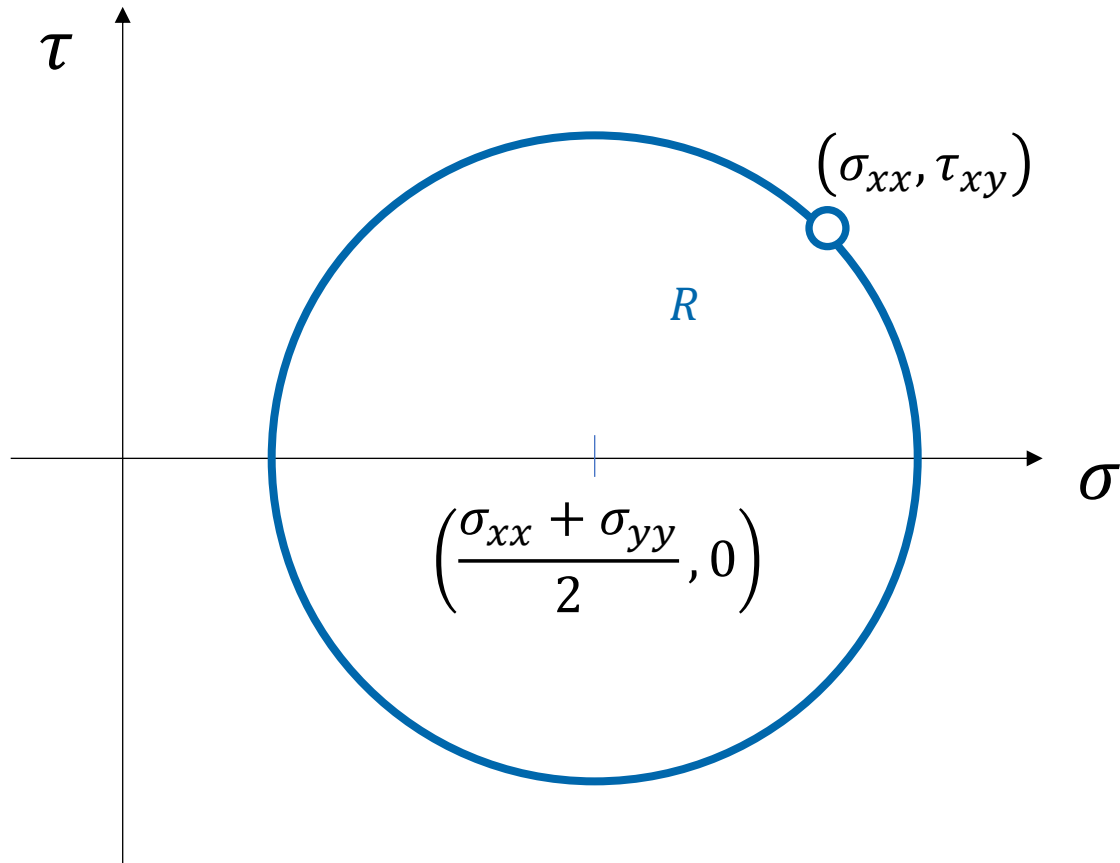
$$\left(\sigma - \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2$$

$$x_c = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2}$$

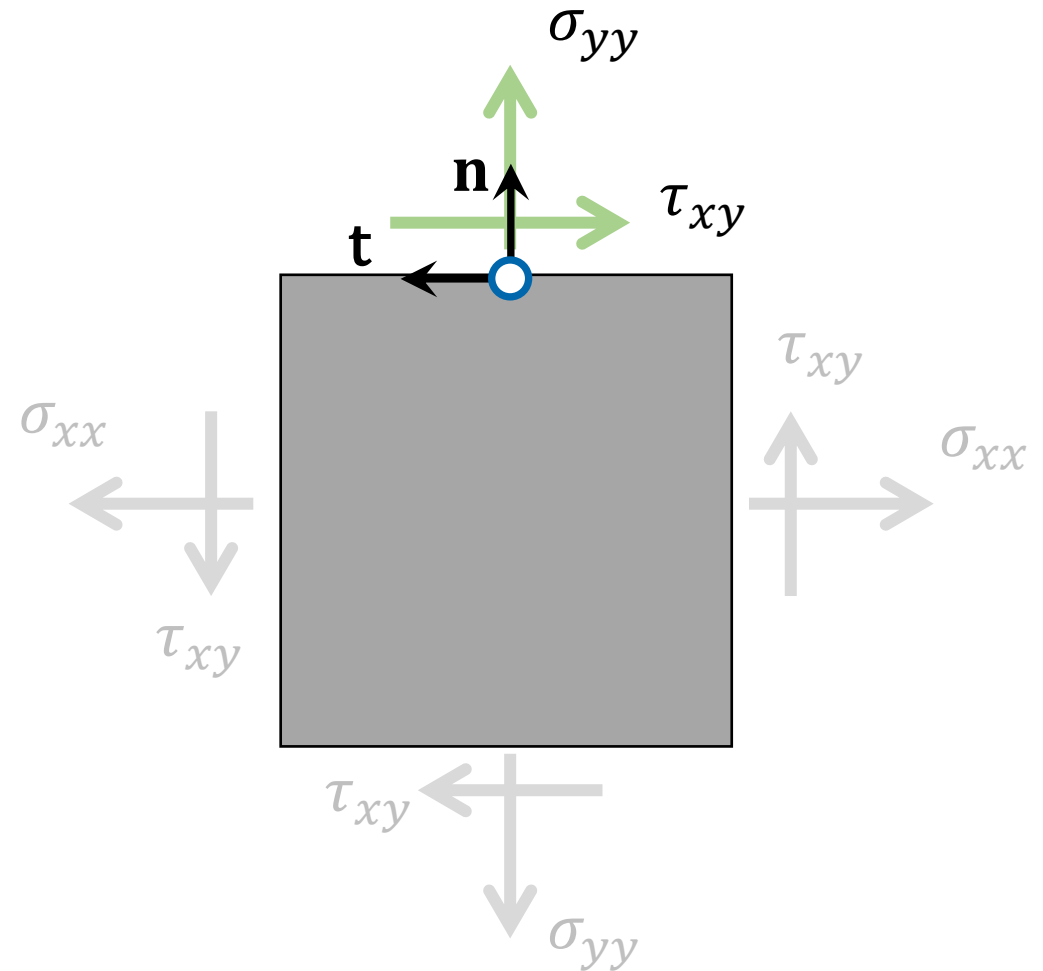
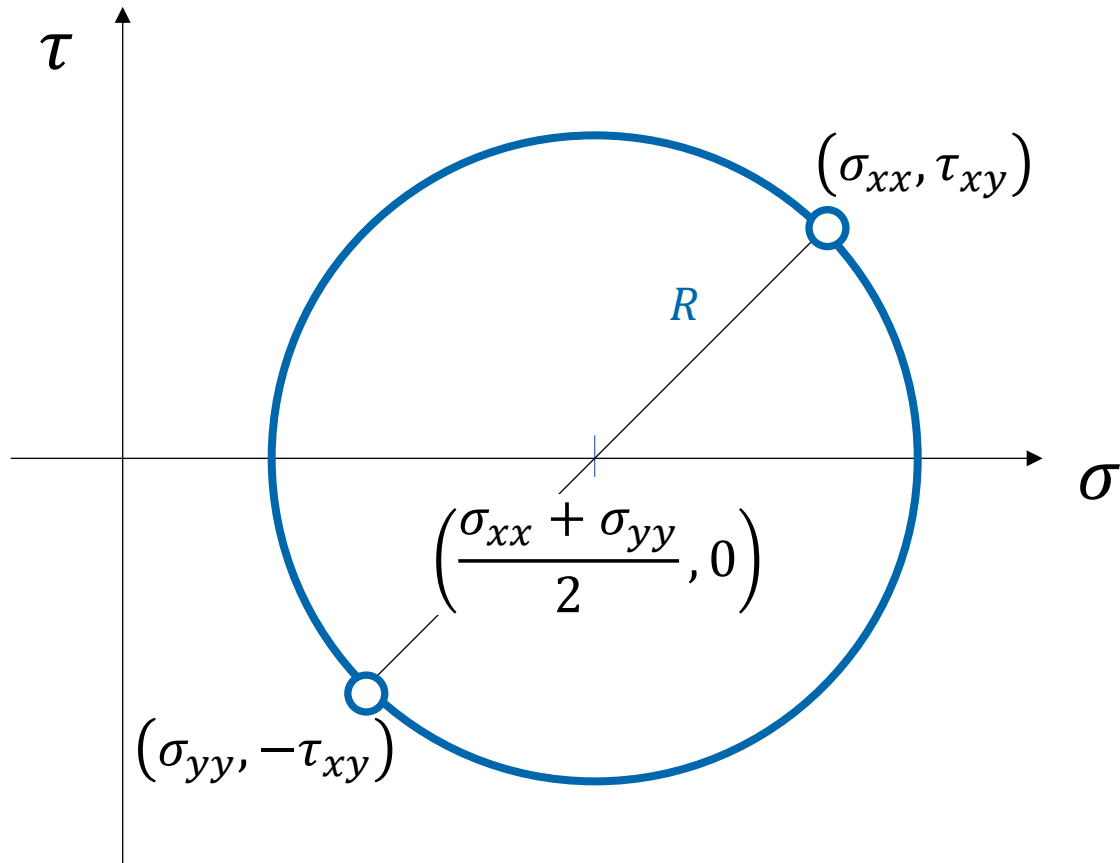
$$y_c = 0$$

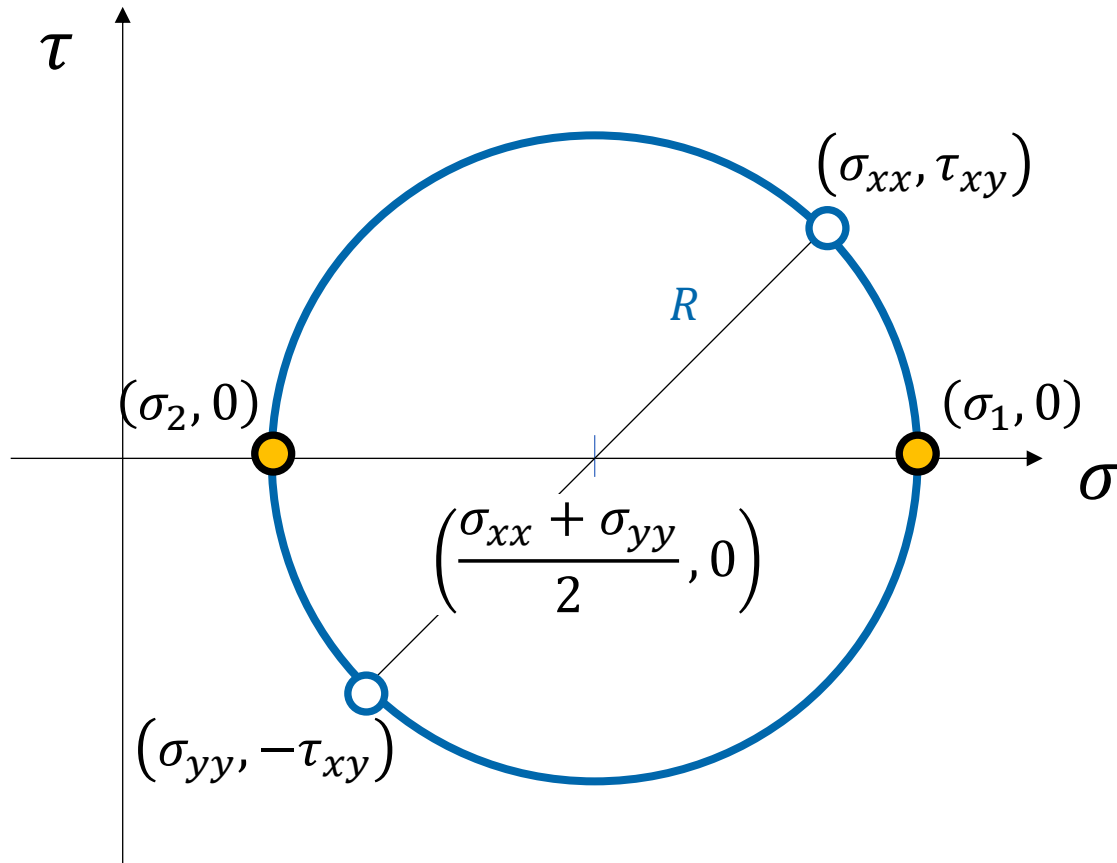
$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma \\ \tau \end{Bmatrix} = \mathbf{Q} (\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n})$$



$$\begin{Bmatrix} \sigma \\ \tau \end{Bmatrix} = \mathbf{Q} (\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n})$$





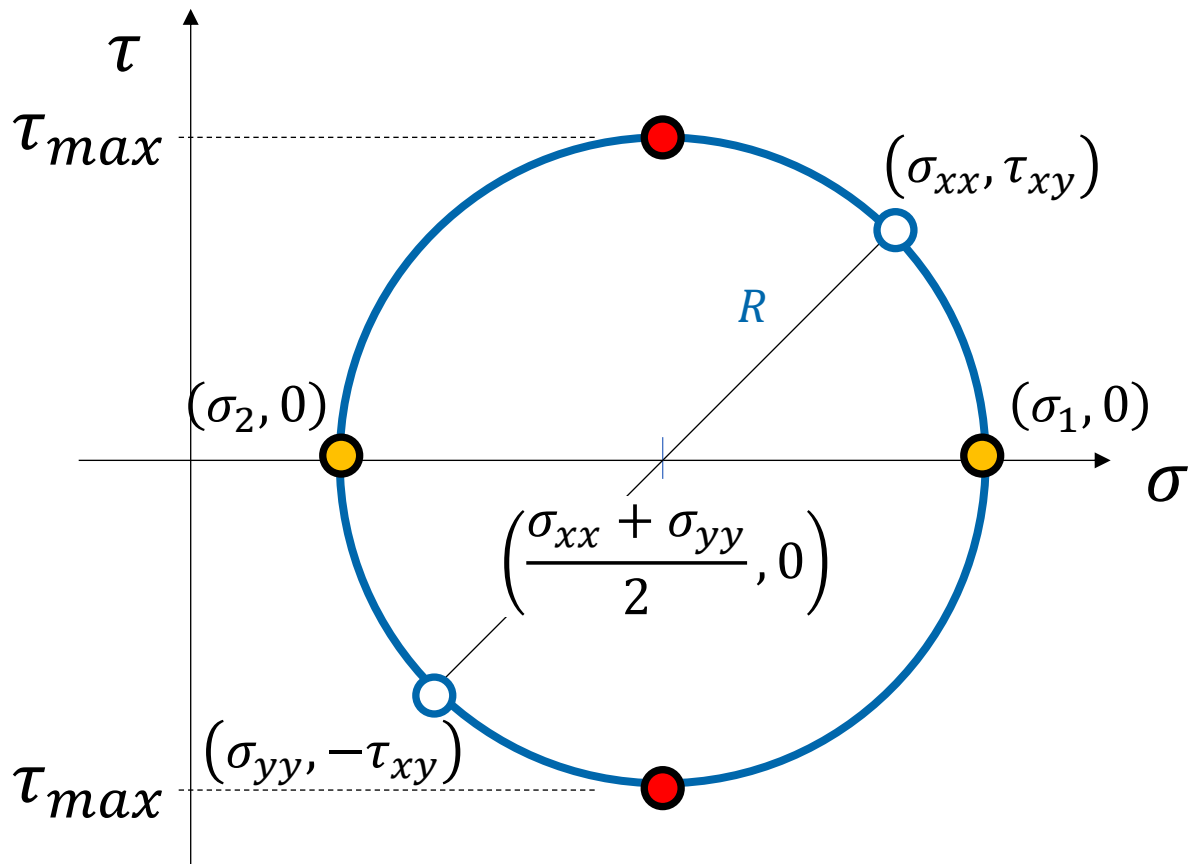
Tensions principals:

$$\sigma_1 = x_c + R$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_2 = x_c - R$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



Tensió de cisallament màxima:

$$\tau_{max} = R$$

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$