

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
ESCOLA DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOTECNIA, ESTRUTURAS E
CONSTRUÇÃO CIVIL

**OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA APLICADA
A ESTRUTURAS COM
COMPORTAMENTO ELÁSTICO NÃO
LINEAR**

DANILO BORGES CAVALCANTI

D0252E22
GOIÂNIA
2022



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
ESCOLA DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a [Lei 9.610/98](#), o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

☒ Dissertação ☐ Tese

2. Nome completo do autor

Danilo Borges Cavalcanti

3. Título do trabalho

Otimização topológica aplicada a estruturas com comportamento elástico não linear

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento ☐ SIM ☒ NÃO¹

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:

a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);

b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.

O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.



Documento assinado eletronicamente por **Daniel De Lima Araujo, Professor do Magistério Superior**, em 04/03/2022, às 11:23, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

Documento assinado eletronicamente por **DANILO BORGES CAVALCANTI, Discente**, em 04/03/2022, às 11:26, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site

https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?

[acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0](https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **2733739** e

o código CRC **D4F57E2E**.

DANILO BORGES CAVALCANTI

**OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA APLICADA
A ESTRUTURAS COM
COMPORTAMENTO ELÁSTICO NÃO
LINEAR**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Geotecnia, Estruturas e Construção Civil da Universidade Federal de Goiás para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Área de concentração: Estruturas

Orientador: Dr. Daniel de Lima Araújo

Coorientadora: Dra. Sylvia Regina Mesquita de Almeida

D0252E22
GOIÂNIA
2022

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Cavalcanti, Danilo Borges

Otimização topológica aplicada a estruturas com comportamento
elástico não linear [manuscrito] / Danilo Borges Cavalcanti. - 2022.
251 f.: il.

Orientador: Prof. Daniel de Lima Araújo; co-orientador Sylvia
Regina Mesquita de Almeida.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Escola
de Engenharia Civil e Ambiental (EECA), Programa de Pós-Graduação
em Engenharia Civil - Geotecnia, Estruturas e Construção Civil, Goiânia,
2022.

Bibliografia. Apêndice.

Inclui siglas, abreviaturas, símbolos, gráfico, tabelas, lista de
figuras, lista de tabelas.

1. Otimização topológica. 2. Elasticidade não-linear. 3. Múltiplos
materiais e múltiplas restrições de volume. 4. Formulação híbrida. I.
Araújo, Daniel de Lima, orient. II. Título.

CDU 624



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

ESCOLA DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº **252** da sessão de Defesa de Dissertação de **Danilo Borges Cavalcanti** que confere o título de Mestre em Geotecnia, Estruturas e Construção Civil, na área de concentração em **Estruturas**.

Aos **vinte e dois dias do mês de fevereiro do ano de dois mil e vinte e dois**, a partir das **14:00**, por meio de **videoconferência**, realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação intitulada **“Otimização topológica aplicada a estruturas com comportamento elástico não linear”**. Os trabalhos foram instalados pelo Orientador, Professor Doutor **Daniel de Lima Araújo (PPGGECON/UFG)** com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professora Doutora **Renata Machado Soares (PPGGECON/UFG)**, membro titular interno; Professor Doutor **Anderson Pereira (PPGMEC / PUC-Rio)**, membro titular externo. Esteve também presente na sessão a professora coorientadora do trabalho **Sylvia Regina Mesquita de Almeida**. Durante a arguição os membros da banca **não fizeram** sugestão de alteração do título do trabalho. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação tendo sido o candidato **aprovado** pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo Professor Doutor **Daniel de Lima Araújo**, Presidente da Banca Examinadora, e pela professora Doutora **Sylvia Regina Mesquita de Almeida**, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, aos **vinte e dois dias do mês de fevereiro do ano de dois mil e vinte e dois**.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA



Documento assinado eletronicamente por **Daniel De Lima Araujo, Professor do Magistério Superior**, em 22/02/2022, às 15:44, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Anderson Pereira, Usuário Externo**, em 22/02/2022, às 15:44, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Renata Machado Soares, Professor do Magistério Superior**, em 22/02/2022, às 15:45, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **DANILO BORGES CAVALCANTI, Discente**, em 22/02/2022, às 15:54, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

Documento assinado eletronicamente por **Sylvia Regina Mesquita De Almeida, Professor do Magistério Superior**, em 03/03/2022, às 14:43, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento



no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site

https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?

[acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0](#), informando o código verificador **2672380** e o código CRC **F91245E5**.

Referência: Processo nº 23070.005361/2022-38

SEI nº 2672380

AGRADECIMENTOS

À minha orientadora, professora, e amiga, Sylvia Regina Mesquita de Almeida. Muito obrigado pela parceria, paciência e confiança.

Ao meu orientador e professor, Daniel de Lima Araújo, que desde a iniciação científica me incentivou e inspirou.

Aos meus professores e professoras da UFG, em especial à professora Renata Machado Soares e aos professores Zenón J. G. N. Del Prado e Frederico Martins Alves da Silva pelos ensinamentos transmitidos, apoio e amizade.

Aos meus familiares, em destaque, meu pai, Ruy, e minha mãe, Luciene.

Aos meus amigos, em especial, Matheus, Pedro, João Pedro e Lorrán, que estiveram sempre presentes neste período.

Ao Arthur, meu namorado, por ajudar a controlar minha ansiedade, ficar do meu lado e me apoiar durante a conclusão desta etapa.

À CAPES pelo apoio financeiro, sem o qual este trabalho não poderia ser realizado.

A todos que de alguma forma colaboraram para a realização deste trabalho.

RESUMO

Embora o nível de maturidade dos estudos em otimização topológica seja avançado, ainda são necessárias investigações a respeito da influência da não-linearidade física nas soluções ótimas obtidas. No campo da engenharia civil, tem-se o concreto e o aço entre os materiais mais utilizados, e ambos apresentam um comportamento não-linear. Dois tipos de materiais elásticos não-lineares são utilizados: materiais com e sem a presença de um limite de tensão. Para cada tipo de material foi apresentado o tipo de formulação do problema de otimização mais adequada, entre as já existentes na literatura, sendo elas: a maximização da energia potencial total estacionária e a de maximização da energia interna de deformação. O objetivo principal é implementar formulações de otimização topológica que considerem a não-linearidade física do material e aplicá-las para obtenção do caminho de forças em elementos de concreto armado. Utilizam-se e comparam-se duas diferentes abordagens: considerando múltiplos materiais e múltiplas restrições de volume; e considerando a formulação híbrida. Os resultados numéricos evidenciam as vantagens e desvantagens de cada uma das abordagens, bem como a influência do uso de materiais com comportamento elástico não-linear.

Palavras-chave: Otimização topológica. Elasticidade não-linear. Múltiplos materiais e múltiplas restrições de volume. Formulação híbrida.

ABSTRACT

Although the level of academic maturity in topology optimization is advanced, further investigations regarding the influence of material nonlinearity in the optimal solutions are needed. In the Civil Engineering field, concrete and steel are among the most used materials, both possessing nonlinear behavior. Two categories of materials with nonlinear elastic behavior are used: materials with and without a stress level limit. For each material category, the more appropriate topology optimization formulation was presented, including the maximization of the stationary total potential energy and the maximization of internal strain energy. The main goal is to make the numerical implementation of topology optimization formulations that considered material nonlinearity and apply them to obtain the force visualization in elements of reinforced concrete. Two different approaches were used and compared: considering multiple materials and multiple volume constraints; and considering a hybrid formulation. The numeric results highlight the advantages and disadvantages of each approach, and also how the nonlinear elastic model constitutive has influenced the final layouts.

Keywords: Topology optimization. Nonlinear elasticity. Multiple materials and volume constraints. Hybrid formulation.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 - Exemplos de softwares de otimização topológica: (a) Interactive 3D TopOpt App; (b) Solução obtida por meio do PolyTop; (c) Braço de suspensão automotivo obtido por otimização topológica com uso do OptiStruct®; (d) Solução obtida por meio do GRAND3.....	42
Figura 1.2 - Exemplo da viga cantilever evidenciando a vantagem do uso de elementos poligonais: (a) Malha de elementos finitos Q4 de 100 x 40; (b) Malha composta por 4000 elementos finitos poligonais; (c) Solução obtida com a malha de elementos finitos Q4 de 200 x 80; (d) Malha composta por 16000 elementos finitos poligonais.....	44
Figura 2.1 - Domínio estendido e condições de contorno	51
Figura 2.2 - Comportamento das funções de interpolação não lineares do volume em um ponto	57
Figura 2.3 - Exemplo: discretização da função de projeto η_h	59
Figura 2.4 - Exemplo do efeito da aplicação do filtro de regularização diretamente em η_h da Figura 2.3	59
Figura 2.5 - Exemplo do efeito da aplicação do filtro de regularização discretizado em η_h da Figura 2.3	61
Figura 2.6 - Ilustração da definição dos fatores peso do filtro de regularização	61
Figura 3.1 - Exemplos de diferentes comportamentos tensão-deformação em estado uniaxial: (a) Material com comportamento bilinear; (b) Material com comportamento hiperelástico; (c) Material elástico com limite de tensão	67
Figura 3.2 - Definição das sub-regiões do espaço das tensões principais	73
Figura 3.3 - Representação gráfica do critério da busca linear inexata	87
Figura 3.4 - Validação do modelo bilinear: (a) Geometria e condições de contorno; (b) Treliza idealizada	91
Figura 3.5 - Validação do modelo bilinear: Soluções: (a) $E_t / E_c = 1$; (b) $E_t / E_c = 3$; (c) $E_t / E_c = 8$;	92
Figura 3.6 - Cores utilizadas para identificar o estado de tensão dos elementos da topologia obtida	93
Figura 3.7 - Exemplo 01: Geometria	94

Figura 3.8 - Curvas tensão - deformação em estado plano de deformação	94
Figura 3.9 - Soluções topológicas; identificação do estado de tensão da topologia final; e evoluções da função objetivo: (a), (c) e (e) $\alpha = 1500$; (b), (d) e (f) $\alpha = -1500$	95
Figura 3.10 – Exemplo 01: (a) Geometria; (b) Modelo de Bielas e Tirantes*	96
Figura 3.11 – Exemplo 01:(a) Solução obtida com material com comportamento linear; (b) Identificação do estado de tensão da solução obtida com material com comportamento linear; (c) Solução obtida com material com comportamento bilinear; (d) Identificação do estado de tensão da solução obtida com material com comportamento bilinear	97
Figura 3.12 - Exemplo 02: Geometria, condições de contorno e composição da malha de elementos finitos poligonais.....	98
Figura 3.13 - Exemplo 02 – Soluções topológicas e identificação do estado de tensão: (a) Material linear; (b) Material bilinear	99
Figura 3.14 - Exemplo 03: Geometria e condições de contorno.....	100
Figura 3.15 - Exemplo 03: Soluções com materiais bilineares: (a) Material 1; (b) Material 2; (c) Material 3	101
Figura 3.16 - Exemplo 03: Soluções com Material 4 para (a) $P = 10$ kN; (b) $P = 10000$ kN; (c) $P = 50000$ kN	102
Figura 3.17 - Exemplos de pontes: (a) Ponte Manoel Ribas; (b) Ponte na RJ-161	102
Figura 4.1 - Comparação do modelo elastoplástico perfeito com o modelo elástico não-linear.....	105
Figura 4.2 - Superfície de ruptura de Von Mises	107
Figura 4.3 - Comportamento em cisalhamento puro do modelo elástico não-linear assintótico (Para $\tau_y = 2,02E+5$).....	108
Figura 4.4 - Exemplo do cilindro pressurizado: geometria, condições de contorno adotadas e dados da malha	115
Figura 4.5 - Exemplo do cilindro pressurizado: Pressão interna vs. Energia prescrita.....	116
Figura 4.6 - Tensões de von Mises normalizadas para diferentes valores de energia prescrita: (a) $C_0 = 10^{-3}$ kJ; (b) $C_0 = 2$ kJ; (c) $C_0 = 4$ kJ; (d) $C_0 = 80$ kJ.....	117
Figura 4.7 - Situações que podem ser obtidas na análise estrutural.....	118
Figura 4.8 - Ilustração do controle de energia para um exemplo de 1 grau de liberdade	119
Figura 4.9 - Exemplo de validação: geometria e condições de contorno	121
Figura 4.10 – Topologia final e tensões de von Mises normalizadas das soluções obtidas por Zhao, Ramos Jr. e Paulino (2019): (a) $C_0 = 10^{-4}$ kJ; (b) $C_0 = 3$ kJ	121

Figura 4.11 - Soluções topológicas e campo de tensões equivalentes de von Mises: (a) $C_0 = 10^{-4}$ kJ; (b) $C_0 = 3$ kJ	122
Figura 4.12 – Nó de pórtico: geometria, condições de contorno e composição da malha de elementos finitos poligonais	124
Figura 4.13 - Soluções topológicas e campo de tensões equivalentes de von Mises: (a) $C_0 = 2 \cdot 10^{-6}$ MJ; (b) $C_0 = 10^{-5}$ MJ	125
Figura 5.1 - Domínio estendido e condições de contorno	127
Figura 5.2 - Ilustração da especificação dos materiais e das restrições de volume para uma malha de 2 x 2 elementos com 4 materiais candidatos e 3 restrições.....	129
Figura 5.3 - Exemplo de validação: Geometria e condições de contorno	145
Figura 5.4 - Soluções do exemplo de validação: (a) $P = 0,5$ kN; (b) $P = 3,0$ kN. Fonte: Zhang e Chi (2020).....	146
Figura 5.5 - Soluções obtidas com o ZPR sem separação de sensibilidade: (a) $P = 0,5$ kN; (b) $P = 3,0$ kN.....	147
Figura 5.6 - Soluções obtidas com o ZPR com separação de sensibilidade. Sem realizar a continuação no parâmetro γ : (a) $P = 0,5$ kN; (b) $P = 3,0$ kN. Realizando a continuação no parâmetro γ : (c) $P = 0,5$ kN; (d) $P = 3,0$ kN	148
Figura 5.7 – Exemplo 01: Geometria e condições de contorno.....	150
Figura 5.8 - Viga biapoiada com cargas opostas: (a) $P = 0.5$ kN; (b) $P = 3$ kN	151
Figura 5.9 - Exemplo 02: Geometria e condições de contorno	151
Figura 5.10 - Exemplo 02: Definição da restrição de volume do caso 01.....	152
Figura 5.11 – Exemplo 02: Soluções para o Caso 1: (a) $P = 1$ kN; (b) $P = 10$ kN	152
Figura 5.12 - Exemplo 02: Definição da restrição de volume do caso 03.....	152
Figura 5.13 – Exemplo 02: Soluções para o Caso 2: (a) $P = 1$ kN; (b) $P = 10$ kN	153
Figura 5.14 - Consolo curto: geometria, condições de contorno e composição da malha de elementos finitos poligonais	153
Figura 5.15 - Consolo curto - Caso 1: (a) Definição da restrição de volume; (b) Solução com $H = 0$; (c) Solução com $H = 5,0$ kN/m.....	155
Figura 5.16 - Consolo curto - Caso 2: (a) Definição da restrição de volume; (b) Solução obtida	156
Figura 5.17 - Consolo curto – Caso 3: (a) Definição da restrição de volume; (b) Solução com $H = 5,0$ kN	157
Figura 5.18 - Consolo curto – Caso 4: (a) Definição da restrição de volume; (b) $g_1 = 30\%$; (c) $g_1 = 15\%$;	158

Figura 5.19 - Consolo curto – Caso 5: (a) Definição da restrição de volume; (b) $g_1 = 30\%$; (c) $g_1 = 15\%$	159
Figura 5.20 - Consolo curto – Caso 6: (a) Definição da restrição de volume; (b) $g = 30\%$; (c) $g = 15\%$	160
Figura 5.21 – Exemplo 04: Geometria, condições de contorno e composição da malha de elementos finitos poligonais.....	161
Figura 5.22 - Exemplo 04 - Caso 01: (a) Definição da restrição de volume; (b) Solução topológica.....	161
Figura 5.23 - Exemplo 04 - Caso 02: (a) Definição da restrição de volume (dimensões em metro); (b) Solução topológica.....	162
Figura 5.24 - Exemplo 04 - Caso 03: (a) Definição da restrição de volume; (b) Solução topológica.....	163
Figura 5.25 – Exemplo 05: Geometria, condições de contorno e composição da malha de elementos finitos poligonais.....	164
Figura 5.26 – Exemplo 05: (a) Definição da restrição de volume; (b) Solução topológica....	164
Figura 5.27 - Exemplo 05: (a) Definição da restrição de volume; (b) Solução topológica	165
Figura 5.28 - Exemplo 05: (a) Definição da restrição de volume; (b) Solução topológica	166
Figura 5.29 - Viga biapoiada com abertura: geometria e condições de contorno.....	166
Figura 5.30 -Viga biapoiada com abertura - soluções obtidas: (a) Sem presença de abertura; (b) Com abertura e $l_x = 1,75$ m; (c) Com abertura e $l_x = 1,0$ m; (d) Com abertura e $l_x = 0,5$ m	167
Figura 5.31 - Viga parede com dois furos: Geometria e condições de contorno.....	168
Figura 5.32 - Viga parede com dois furos: (a) Solução topológica; (b) Tensão equivalente de von Mises normalizada	169
Figura 5.33 – Viga apoiada em três apoios rígidos: geometria, condições de contorno e definição das restrições de volume	170
Figura 5.34 - Viga apoiada em três apoios rígidos: (a) Solução topológica obtida com $C_0 = 0,1$ kPa; (b) Tensões equivalentes de von Mises normalizadas com $C_0 = 0,1$ kPa; (c) Solução topológica obtida com $C_0 = 0,5$ kPa; (d) Tensões equivalentes de von Mises normalizadas com $C_0 = 0,5$ kPa; (e) Solução topológica obtida com $C_0 = 3$ kPa; (f) Tensões equivalentes de von Mises normalizadas com $C_0 = 3$ kPa;.....	171
Figura 6.1 - Malha híbrida formada por elementos quadrilaterais.....	179
Figura 6.2 - Patologia na malha híbrida com a utilização de elementos poligonais	180

Figura 6.3 - Etapa de translação do processo de adaptação: (a) Cálculo de $\mathbf{d}$; (b) e (c) Aplicação de $\mathbf{d}$ nos nós do elemento; (d) Malha após a translação	181
Figura 6.4 - Etapa de redução da escala do elemento do processo de adaptação: (a) Definição dos vetores $\mathbf{v}_i$; (b) Malha após a etapa de redução da escala do elemento transladado.....	182
Figura 6.5 - Malha híbrida: (a) Antes do processo de adaptação; (b) Após o processo de adaptação	183
Figura 6.6 - Malha híbrida obtida pela abordagem alternativa.....	184
Figura 6.7 - Convergência do algoritmo de Lloyd	185
Figura 6.8 - Viga MBB.....	186
Figura 6.9 - Viga MBB - Solução no final da primeira etapa do processo de otimização	187
Figura 6.10 - Comportamento da função objetivo com a aplicação do filtro de eliminação das barras finas.....	188
Figura 6.11 - Viga MBB - Solução após a aplicação do filtro para eliminação das barras finas: (a) $f_{tol} = 0,001$; (b) $f_{tol} = 0,1$	191
Figura 6.12 - Viga MBB - Solução final do processo de otimização: (a) Solução híbrida obtida com $f_{tol} = 0,001$; (b) Identificação do estado de tensão dos elementos para $f_{tol} = 0,001$; (c) Solução híbrida obtida com $f_{tol} = 0,1$; (d) Identificação do estado de tensão dos elementos para $f_{tol} = 0,1$;	192
Figura 6.13 – Viga MBB: Evolução da função objetivo durante o processo de otimização.....	192
Figura 6.14 – Exemplo 01: (a) Geometria e condições de contorno; (b) Solução após a aplicação do filtro; (c) Solução final do processo de otimização; (d) Identificação do estado de tensão dos elementos contínuos.....	194
Figura 6.15 - Exemplo 06: Geometria e condições de contorno	196
Figura 6.16 - Exemplo 06 com grades de nós menos refinadas: (a) Grade de nós 1; (b) Solução topológica obtida com a grade de nós 1; (c) Identificação do estado de tensão dos elementos; (d) Grade de nós 2; (e) Solução topológica obtida com a grade de nós 2; (f) Identificação do estado de tensão dos elementos;.....	197
Figura 6.17 - Exemplo 06 com grades de nós mais refinadas: (a) Grade de nós 1; (b) Solução topológica obtida com a grade de nós 1; (c) Identificação do estado de tensão dos elementos; (d) Grade de nós 2; (e) Solução topológica obtida com a grade de nós 2; (f) Identificação do estado de tensão dos elementos;.....	198

Figura 6.18 - - Exemplo 06 com grade de nós mais refinada e regiões passivas:	
(a) Grade de nós 1 com região passiva; (b) Solução topológica obtida; (c) Identificação do estado de tensão dos elementos.....	199
Figura 6.19 - Dente: geometria e condições de contorno	200
Figura 6.20 - Dente: Grade de nós 1 para geração da malha de elementos de barra	200
Figura 6.21 - Dente: Soluções topológicas finais e identificação do estado de tensão dos elementos contínuos: (a) $f_{tol} = 0,001$; (b) $f_{tol} = 0,1$	201
Figura 6.22 – Dente: Grade de nós 2 para geração da malha de elementos de barra.....	202
Figura 6.23 - Dente: Solução com grade de nós 2: (a) Solução; (b) Identificação do estado de tensão	202
Figura 6.24 - Viga parede com furo: geometria e condições de contorno	203
Figura 6.25 - Viga parede com furo: Grade de nós 1 para a geração da malha de elementos de barra	203
Figura 6.26 - Viga parede com furo: (a) Solução obtida; (b) Identificação do estado de tensão dos elementos contínuos	204
Figura 6.27 -Viga parede com furo: Grade de nós refinada para geração da malha inicial de elementos de barra.....	204
Figura 6.28 - Viga parede com furo com grade de nós para geração da malha de elementos de barra refinada: (a) Solução topológica com $f_{tol} = 0,001$; (b) Identificação do estado de tensão com $f_{tol} = 0,001$; (c) Solução topológica com $f_{tol} = 0,01$; (d) Identificação do estado de tensão com $f_{tol} = 0,01$; (e) Solução topológica com $f_{tol} = 0,1$; (f) Identificação do estado de tensão com $f_{tol} = 0,1$	205
Figura 6.29 - Viga parede com furo: localização da região de elementos contínuos passivos e indicação da malha inicial de elementos de barra utilizada.....	206
Figura 6.30 - Viga parede com furo com grade de nós para geração da malha de elementos de barra refinada e consideração de região passiva de elementos contínuos: (a) Solução topológica com $f_{tol} = 0,1$; (b) Identificação do estado de tensão com $f_{tol} = 0,1$;	207
Figura 6.31 - Viga com abertura: geometria e condições de contorno	207
Figura 6.32 – Viga com abertura: grade de nós utilizada para geração da malha de elementos de barra	208
Figura 6.33 – Viga biapoiada com abertura – soluções topológicas e identificação do estado de tensão dos elementos contínuos: (a) Sem presença de abertura; (b) Com abertura e $l_x = 1,75$ m; (c) Com abertura e $l_x = 1,0$ m; (d) Com abertura e $l_x = 0,5$ m	209

Figura C.1 - Implementação do cálculo da função objetivo.....	236
Figura C.2 – Implementação do cálculo das restrições não-lineares.....	236
Figura C.3 - Script para chamada da função <code>fmincon</code>	237
Figura D.1 - Elemento de barra genérico de dois nós	239
Figura D.2 - Modelo de Ogden para diferentes valores de α_1 e α_2	244
Figura D.3 - Exemplos de estruturas-base com diferentes graus de conectividade: (a) Grade de nós usada para geração das barras; (b) Grau de conectividade 1; (c) Grau de conectividade 2	245
Figura D.4 - Exemplo método de <i>Ground Structure</i> : (a) Domínio de projeto; (b) Grade de nós; (c) Estrutura base; (d) Solução da otimização de dimensões; (e) Topologia extraída com α_f igual a 0,05; (f) Topologia extraída com α_f igual a 0,10	248

LISTA DE QUADROS

Quadro 3.1 – Algoritmo do método de Newton-Raphson com busca linear inexata	88
Quadro 3.2 - Algoritmo da busca linear inexata.....	88
Quadro 4.1 - Algoritmo de solução do sistema de equação não lineares com controle de energia	113
Quadro 6.1 - Algoritmo do filtro com passo constante	190
Quadro A.1 - Algoritmo do esquema de atualização das variáveis de projeto com o OC	228

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 - Soluções ótimas do problema (3.101) para diferentes relações E_t / E_c	92
Tabela 3.2 - Parâmetros dos materiais utilizados no Exemplo 03.....	100
Tabela 4.1 - Parâmetros adotados para o exemplo de validação	114
Tabela 4.2 - Exemplo cilindro pressurizado: comparação dos valores de p_{lim}	116
Tabela 4.3 - Exemplo de validação: comparação dos valores de função objetivo e fator de carga.....	122
Tabela 5.1 - Definição dos modelos, cores e parâmetros dos materiais.....	145
Tabela 5.2 - Comparação dos valores da função objetivo (Nm)	149
Tabela 5.3 - Identificação e parâmetros dos materiais	154
Tabela 5.4 – Identificação e parâmetros dos materiais.....	168
Tabela 5.5 – Identificação e parâmetros dos materiais.....	170

LISTA DE ABREVIATURAS

DMO	- <i>Discrete Material Optimization</i>
MBT	- Modelo de Bielas e Tirantes
MMA	- <i>Method of Moving Asymptotes</i>
MEF	- Método dos Elementos Finitos
OT	- Otimização de Topologia
OC	- <i>Optimality Criteria</i>
SIMP	- <i>Solid Isotropic Material with Penalization</i>
ZPR	- <i>Zhang-Paulino-Ramos update scheme</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos Romanos:

a	- vetor com as componentes de sensibilidade da função objetivo negativas (Capítulo 5)
a	- vetor com as áreas da seção transversal dos elementos de barras (Capítulo 6)
A	- vetor com a áreas dos elementos
A_α	- matriz auxiliar
A_l	- área da superfície do elemento <i>l</i>
A_{max}	- área máximo de área da seção transversal das barras
A_Ω	- área do domínio de projeto
b	- vetor com as componentes de sensibilidade da função objetivo positivas
B_l	- matriz de compatibilidade cinemática associada ao elemento <i>l</i>
c	- coeficiente de normalização
c_k	- constantes da combinação linear
c_k	- variação no valor da sensibilidade da função objetivo
C₀	- energia prescrita para solução com controle de energia
d_{med}	- dimensão média dos elementos da malha
D_i^p	- matriz constitutiva tangente no sistema principal na sub-região <i>i</i> do espaço das tensões principais
D_i	- matriz constitutiva no sistema de coordenadas global
D_k	- tensor constitutivo elástico do material <i>k</i> ;
D_p^(e)	- tensor constitutivo elástico interpolado do elemento <i>e</i>
D_k^(e)	- tensor constitutivo elástico do elemento <i>e</i> associada ao material <i>k</i>
D_i^{tan}	- matriz constitutiva tangente
E	- vetor com os parâmetros de rigidez
E₁	- módulo de elasticidade associado à direção principal 1
E₂	- módulo de elasticidade associado à direção principal 2
E_c	- módulo de elasticidade à compressão

E_l	- parâmetro de rigidez do elemento l
E_r	- erro adimensional do algoritmo de Lloyd
E_t	- módulo de elasticidade à tração
$E_{T,j}$	- módulo de elasticidade tangente do elemento de barra j
E_0	- módulo de elasticidade tangente inicial
$E_i^{(e)}$	- parâmetro de rigidez do elemento e associado ao material i
f	- função objetivo
f_{esc}	- fator de escala
f_{tol}	- parâmetro de tolerância do filtro de eliminação das barras finas
$\bar{f}$	- função objetivo linearizada
f_{VM}	- função de escoamento de von Mises
f_{tol}	- tolerância de variação no valor da função objetivo
F	- filtro de regularização linear
$\mathbf{F}_{ext}$	- vetor de forças externas nodais da estrutura
$\mathbf{F}_{int}$	- vetor de forças internas nodais da estrutura
g	- restrição de volume
g_j	- restrição de volume j
G	- módulo de elasticidade transversal
$\mathbf{h}_k$	- aproximação da hessiana na iteração k do processo de otimização
H^1	- espaço das funções de Hilbert de ordem 1
$\mathbf{I}$	- matriz identidade
J	- jacobiano do processo de deformação
Jm_E	- diagonal da matriz jacobiana de m_E
Jm_V	- diagonal da matriz jacobiana de m_V
$\mathbf{k}_l$	- matriz de rigidez do elemento l
$\mathbf{k}_t^l$	- matriz de rigidez tangente do elemento l
K	- módulo de compressão (<i>Bulk Modulus</i>)
$\mathbf{K}$	- matriz de rigidez elástica da estrutura
$\mathbf{K}_t$	- matriz de rigidez tangente da estrutura
$\mathbf{K}_{t,reg}$	- matriz de rigidez tangente da estrutura com a regularização de
Tikhonov	
l_i	- cosseno diretor da direção principal $\mathbf{n}_i$ em relação ao eixo x
$\mathbf{L}$	- vetor com os comprimentos dos elementos de barra

L_j	- comprimento do elemento de barra j
m_E	- função de interpolação do material para cálculo da rigidez
m_i	- cosseno diretor da direção principal $\mathbf{n}_i$ em relação ao eixo y
m_V	- função de interpolação do volume
M	- número de termos no somatório do modelo de Ogden
M	- parâmetro <i>move</i> do OC
$\mathbf{n}_\alpha$	- direção principal α associada a $\bar{\epsilon}_\alpha$.
nc	- número de restrições de volume
N	- número de elementos/variáveis de projeto
N_b	- número de elementos de barra
N_c	- número de elementos contínuos
N_{GL}	- número de graus de liberdade
$\mathbf{N}_i$	- vetor unitário com a orientação da barra i
$\mathbf{N}_i$	- vetor das funções de forma
NR	- norma residual de forças
$\mathbf{Q}$	- matriz de transformação
p	- coeficiente de penalização do modelo SIMP
P_F	- operador integral do filtro de densidade
P_{lk}	- componente da matriz $\mathbf{P}$
$\mathbf{P}$	- matriz para operação do filtro de densidade
R	- raio do operador de regularização
$\mathbf{R}$	- vetor de forças nodais residuais
R_0	- raio do operador de regularização inicial
$\mathbf{R}_j$	- vetor para rotação do elemento de barra j
$\mathbf{s}$	- parcela desviadora do tensor de tensões
$\mathbf{s}_k$	- variação do vetor de variáveis de projeto
$\mathbf{s}_k^2$	- vetor com a variação ao quadrado das variáveis de projeto
$\mathbf{t}$	- forças de superfície
$TolNR$	- tolerância da norma residual do vetor de forças
$\mathbf{u}_l$	- vetor de deslocamentos nodais do elemento l
$\mathbf{u}_\omega$	- vetor de deslocamentos associado à forma ótima ω
$\mathbf{U}$	- vetor de deslocamentos nodais da estrutura

$\mathbf{U}_k$	- vetor de deslocamentos nodais na iteração k do método de Newton-Raphson
$\mathbf{V}$	- vetor composto pelos volumes dos elementos
V_l	- volume do elemento l
V_{ext}	- energia potencial das forças externas
V_{max}	- fração de volume de material no domínio estendido prescrita
V_{max}^j	- fração de volume de material prescrita associada à restrição j
$V_i^{(e)}$	- volume do elemento e associado ao material i
$\bar{w}_{lk}$	- fatores peso do filtro de densidade
w_{ek}	- fator peso da penalização da mistura de materiais
W_{int}	- energia interna de deformação
$\mathbf{x}$	- vetor posição
$\mathbf{x}_l$	- posição da semente do elemento l
$\mathbf{x}_l^c$	- posição do centroide do elemento l
$\mathbf{y}$	- vetor de densidades associadas aos elementos
$y_r^{(e)}$	- densidade do elemento e associada ao material r
$\mathbf{Y}$	- matriz de densidades dos elementos
$\mathbf{z}$	- vetor de variáveis de projeto
$\mathbf{z}_b$	- vetor com as variáveis de projeto associadas aos elementos de barra
$\mathbf{z}_c$	- vetor com as variáveis de projeto associadas aos elementos contínuos
$\mathbf{z}_i$	- vetor de variáveis de projeto associadas ao material i
$\bar{z}_i^{(e)}$	- variável intermediária utilizada na linearização da função objetivo
$\mathbf{Z}$	- matriz de variáveis de projeto

Símbolos Gregos:

α_f	- parâmetro de corte do filtro de barras
α_j	- parâmetro do modelo de Ogden
β	- parâmetro da função de interpolação de volume
$\delta_{\alpha\beta}$	- delta de Kronecker
$\partial\omega$	- contorno da forma ω
ε	- parâmetro de Ersatz
$\boldsymbol{\varepsilon}$	- tensor de deformações infinitesimais

ε_{ref}	- valor de deformação de referência para o modelo constitutivo
assintótico	
$\bar{\varepsilon}_{\alpha}$	- deformação principal α
ε_V	- deformação volumétrica
ε_x	- deformação normal na direção cartesiana x
ε_y	- deformação normal na direção cartesiana y
$\mathbf{\varepsilon}_d$	- parcela deviatórica do tensor de deformações infinitesimais
$\mathbf{\varepsilon}_l$	- vetor de deformações do elemento l
$\mathbf{\varepsilon}_p$	- vetor com as componentes de deformação principal
$\mathbf{\varepsilon}_t$	- matriz com as componentes de deformação
ϕ^j	- multiplicador de Lagrange associado à restrição j
Γ_D	- região do contorno da forma em que são aplicadas as condições de contorno essenciais
$\tilde{\Gamma}_N$	- região do contorno da forma em que são aplicadas as forças de superfície ($\tilde{\Gamma}_N \subseteq \Gamma_N$)
η	- parâmetro positivo da regularização de Tikhonov
η	- função de projeto (Capítulo 2)
η	- fator de amortecimento do esquema de atualização das variáveis de projeto
η_0	- valor pequeno positivo
η_h	- função de projeto discretizada
φ	- função associada a busca linear
λ	- fator de carga
λ_c	- alongamento de referência à compressão
λ_i	- alongamentos principais
λ_t	- alongamento de referência à tração
Λ	- primeiro parâmetro de Lamé
μ	- segundo parâmetro de Lamé (módulo de cisalhamento)
μ_j	- parâmetro do modelo de Ogden
ν	- coeficiente de Poisson
ν_1	- coeficiente de Poisson associado à direção principal 1
ν_2	- coeficiente de Poisson associado à direção principal 2

ν_c	- coeficiente de Poisson à compressão
ν_t	- coeficiente de Poisson à tração
κ	- parâmetro de atualização da busca linear
Π	- energia potencial total
Π_{reg}	- energia potencial total com a regularização de Tikhonov
Π_{min}	- energia potencial total estacionária
Π_ω	- energia potencial total associada à forma ω
ρ	- função de densidade
ρ_h	- função de densidade discretizada
ρ_0	- parâmetro da função de interpolação de volume
θ	- ângulo que relaciona a direção principal $\mathbf{n}_1$ com o vetor da base cartesiana $\mathbf{e}_1$
$\boldsymbol{\sigma}$	- tensor de tensões de Cauchy
σ_c	- tensão de referência à compressão
σ_{VM}	- tensão equivalente de von Mises
σ_t	- tensão de referência à tração
σ_x	- tensão axial da barra
$\sigma_{b,j}$	- tensão axial de Cauchy da barra j
$\boldsymbol{\sigma}_l$	- vetor de tensões de Cauchy associado ao elemento l
$\boldsymbol{\sigma}_p$	- vetor com as componentes de tensão principal
$\boldsymbol{\sigma}_{c,l}$	- tensor de tensões de Cauchy do elemento contínuo l
$\bar{\sigma}_\alpha$	- tensão principal α
τ	- constante de guarda para a busca linear
τ_y	- tensão limite em cisalhamento puro
ξ_k	- dimensão do passo da busca linear
ω	- forma ótima de um sistema estrutural
ω_i	- forma composta pelo material i do sistema estrutural
Ω	- domínio estendido
Ω_l	- domínio estendido do elemento l
Ψ	- função de energia interna de deformação específica
Ψ_i	- energia interna de deformação específica do elemento i

- $\Psi_{c,0}$ - função de energia de deformação específica do material que os elementos contínuos
- $\Psi_{b,0}$ - função de energia de deformação específica do material que compõe as barras
- $\Psi_k^{(e)}$ - energia interna de deformação específica do material k do elemento e
- $\Psi_k^{(e)}$ - energia interna de deformação específica interpolada do elemento e
- Ψ_0 - energia interna de deformação específica do material sólido que compõe a forma ω
- ζ - fator de amortecimento do esquema de atualização das variáveis de projeto

Símbolos Matemáticos:

- $\mathcal{A}$ - espaço das funções de densidade admissíveis
- $\mathcal{A}_h$ - espaço admissível discretizado
- $\mathcal{A}_\omega$ - espaço admissível
- $\mathcal{C}_{EL}$ - tensor constitutivo elástico
- $\mathcal{C}_{OG}$ - tensor constitutivo tangente com o modelo Ogden na forma espectral
- $\mathcal{G}_j$ - conjunto de materiais associados à restrição j ;
- $\mathcal{E}_i$ - sub-região i do espaço das deformações principais;
- $\mathcal{E}_j$ - conjunto de índices dos elementos associados à restrição j ;
- $\mathcal{L}$ - função Lagrangeana
- $\mathcal{V}_\omega$ - espaço dos deslocamentos admissíveis
- $\mathcal{V}_h$ - espaço dos deslocamentos admissíveis discretizado
- $\mathcal{O}$ - espaço das formas admissíveis
- $\mathcal{P}_F$ - função de mapeamento
- $\mathcal{P}_S$ - operador de simetria
- $\mathcal{S}_i$ - sub-região i do espaço das tensões principais
- $\mathcal{T}_h$ - partição do domínio estendido com dimensão característica h
- $\mathcal{X}_{\Omega_l}$ - função característica associada ao elemento Ω_l
- $\mathcal{X}_\omega$ - função característica associada à forma ω

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 INTRODUÇÃO	41
1.1. OBJETIVOS.....	48
1.2. ESTRUTURA DO TRABALHO	48
CAPÍTULO 2 CONCEPÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO	
TOPOLÓGICA PELO MÉTODO DA DENSIDADE.....	51
2.1. INTRODUÇÃO AO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO	51
2.2. PARAMETRIZAÇÃO CONTÍNUA.....	52
2.3. REGULARIZAÇÃO DA FUNÇÃO DE DENSIDADE.....	54
2.4. DISCRETIZAÇÃO	58
2.5. ANÁLISE DE SENSIBILIDADE	63
2.6. O PROBLEMA DE MINIMIZAÇÃO DA FLEXIBILIDADE ELÁSTICA	65
CAPÍTULO 3 PROBLEMA DE MAXIMIZAÇÃO DA ENERGIA POTENCIAL	
TOTAL ESTACIONÁRIA.....	67
3.1. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO	68
3.2. MODELOS CONSTITUTIVOS	69
3.2.1. Modelo constitutivo bilinear	72
3.2.2. Modelo constitutivo hiperelástico	80
3.2.2.1. Hipótese de estado plano de deformação	82
3.2.2.2. Hipótese de estado plano de tensão	83
3.3. SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO.....	84
3.4. SOBRE A IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL.....	89
3.5. EXEMPLOS	90
3.5.1. Exemplo de validação do modelo bilinear.....	90
3.5.2. Exemplo de validação do modelo hiperelástico	93
3.5.3. Exemplo 01: Viga parede.....	96
3.5.4. Exemplo 02: Viga parede com furo	98
3.5.5. Exemplo 03: Domínio de uma ponte.....	99

CAPÍTULO 4 PROBLEMA DE MAXIMIZAÇÃO DA ENERGIA INTERNA DE DEFORMAÇÃO.....	105
4.1. DEFINIÇÃO DO MODELO CONSTITUTIVO	106
4.2. SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES NÃO-LINEARES.....	112
4.3. VALIDAÇÃO DA ANÁLISE NÃO-LINEAR COM CONTROLE DE ENERGIA.....	114
4.4. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO	117
4.5. EXEMPLO DE VALIDAÇÃO.....	120
4.6. EXEMPLO: NÓ DE PÓRTICO	123
CAPÍTULO 5 OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA CONSIDERANDO MÚLTIPLOS MATERIAIS E MÚLTIPLAS RESTRIÇÕES DE VOLUME	127
5.1. DEFINIÇÃO DO PROBLEMA	127
5.1.1. Penalização da mistura de materiais.....	130
5.1.2. Análise de sensibilidade.....	132
5.1.3. Equações de equilíbrio.....	135
5.2. ESQUEMA DE ATUALIZAÇÃO ZPR COM SEPARAÇÃO DE SENSIBILIDADE.....	137
5.3. SOBRE A IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL	143
5.4. EXEMPLO DE VALIDAÇÃO: VIGA BIAPOIADA COM CARGA NO CENTRO DO DOMÍNIO	144
5.5. EXEMPLOS.....	149
5.5.1. Exemplo 01: Viga biapoçada com cargas opostas	150
5.5.2. Exemplo 02: Viga engastada com carga no meio do vão.....	151
5.5.2.1. Caso 01.....	152
5.5.2.2. Caso 02.....	152
5.5.3. Exemplo 03: Consolo curto de concreto.....	153
5.5.3.1. Caso 01: 2 materiais e 1 restrição de volume global.....	154
5.5.3.2. Caso 02: 2 materiais e 4 restrições de volume	155
5.5.3.3. Caso 03: Uso de concreto mais resistente à tração	156
5.5.3.4. Caso 04: Regiões passivas com 1 restrição e 2 materiais	157
5.5.3.5. Caso 05: Regiões passivas com 1 restrição e 3 materiais	159
5.5.3.6. Caso 06: Regiões passivas com 2 restrições e 3 materiais.....	159
5.5.4. Exemplo 04: Dente de concreto	160

5.5.4.1.	Caso 01	161
5.5.4.2.	Caso 02	162
5.5.4.3.	Caso 03	162
5.5.5.	Exemplo 05: Viga parede com furo	163
5.5.6.	Exemplo 06: Viga biapoiada com abertura.....	166
5.5.7.	Exemplo 07: Viga parede com dois furos	168
5.5.8.	Exemplo 08: Viga apoiada em três apoios rígidos.....	170
CAPÍTULO 6 FORMULAÇÃO HÍBRIDA.....		173
6.1.	ANÁLISE DE SENSIBILIDADE	174
6.2.	EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO	176
6.3.	MALHA HÍBRIDA UTILIZANDO ELEMENTOS POLIGONAIS	179
6.3.1.	Proposta de Oliveira (2021)	180
6.3.2.	Forma alternativa.....	184
6.4.	ESQUEMA DE OTIMIZAÇÃO EM DUAS ETAPAS.....	185
6.5.	SOBRE A IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL.....	193
6.6.	EXEMPLOS	193
6.6.1.	Exemplo 01: Coluna com carga de compressão no topo.....	194
6.6.2.	Exemplo 02: Consolo curto.....	195
6.6.3.	Exemplo 03: Dente de concreto	200
6.6.4.	Exemplo 04: Viga parede com furo	203
6.6.5.	Exemplo 05: Viga biapoiada com abertura.....	207
CAPÍTULO 7 CONCLUSÕES E PROPOSTAS PARA TRABALHOS FUTUROS		211
REFERÊNCIAS		215
APÊNDICE A ESQUEMA DE ATUALIZAÇÃO DAS VARIÁVEIS		223
APÊNDICE B FORMULAÇÃO DE MODELO HIPERELÁSTICO SOBRE		
PEQUENAS DEFORMAÇÕES		229
APÊNDICE C VALIDAÇÃO DA IMPLEMENTAÇÃO DO MODELO		
BILINEAR.....		235
APÊNDICE D CONCEITOS BÁSICOS RELACIONADOS AO MÉTODO DA		
GROUND STRUCTURE		239

APÊNDICE E GERAÇÃO DA MALHA DE ELEMENTOS POLIGONAIS	
UTILIZANDO O POLYMESHER.....	249

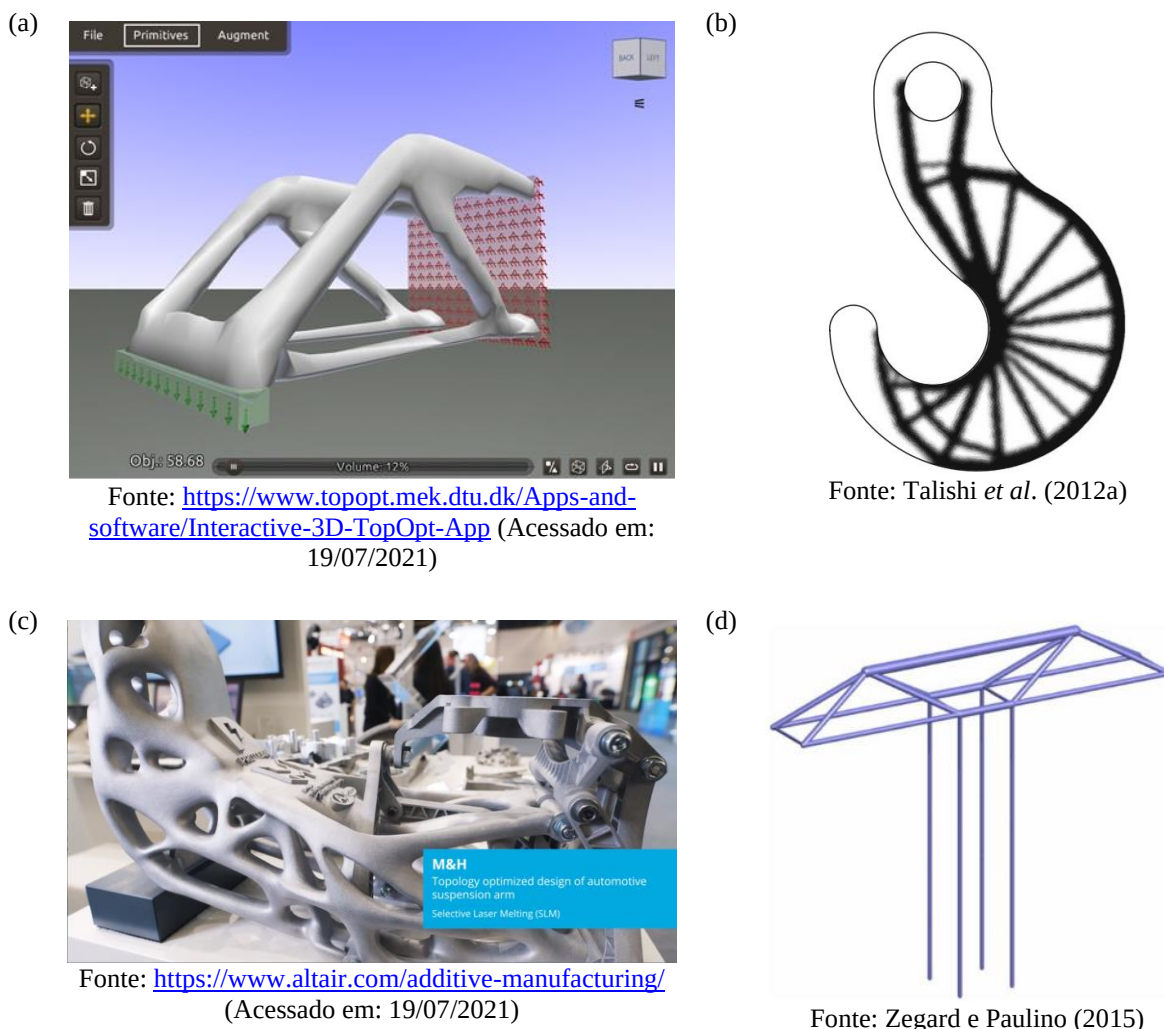
CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

A otimização topológica é a categoria da otimização estrutural que visa obter a distribuição ótima de material em um dado domínio de projeto. Este campo de pesquisa teve início no final da década de 1980 com trabalho de Bendsøe e Kikuchi (1988) e, desde então, teve uma considerável expansão. Amir e Shakour (2018) usam o número das aplicações de seus resultados e de suas conclusões na indústria como evidência da maturidade do campo de pesquisa em otimização topológica. Além disso, destaca-se o número de *softwares* para análise estrutural existentes com módulos de otimização topológica, sendo eles tanto de cunho comercial (ALTAIR, 2021; COMSOL, 2021; DASSAULT SYSTÈMES, 2021; NTOPOLOGY, 2021) quanto de cunho educacional (CHEN; ZHANG; ZHU, 2019; FERRARI; SIGMUND, 2020; FERRARI; SIGMUND; GUEST, 2021; LONDOÑO; PAULINO, 2021a, 2021b; SANDERS *et al.*, 2018; SIGMUND, 2001a; TALISCHI *et al.*, 2012a; TOPOPT, 2021; ZEGARD; PAULINO, 2015, 2014; ZHU *et al.*, 2021).

A Figura 1.1 apresenta alguns resultados de otimização obtidos com uso dos *softwares* mencionados. Na Figura 1.1 (a) apresenta-se uma solução ótima de um problema de minimização da flexibilidade média obtida por meio de um aplicativo para dispositivos móveis, o TopOpt 3D, o qual é fruto dos trabalhos do grupo de otimização topológica (TopOpt) da *Technical University of Denmark*. Na Figura 1.1 (b) é apresentada uma solução obtida pelo PolyTop, um código educacional escrito em Matlab apresentado por Talischi *et al.* (2012a) para otimização topológica utilizando malha de elementos finitos não-estruturadas composta por elementos poligonais para o problema de minimização da flexibilidade média. Na Figura 1.1 (c) é apresentada uma peça manufaturada cujo design foi obtido por um processo de otimização topológica utilizando o OptiStruct® (ALTAIR, 2021). Por fim, na Figura 1.1 (d) é apresentada uma solução obtida pelo GRAND3, um código educacional escrito em Matlab apresentado por Zegard e Paulino (2015), para otimização topológica utilizando a formulação plástica do método da *Ground Structure* em domínios arbitrários tridimensionais.

Figura 1.1 - Exemplos de softwares de otimização topológica: (a) Interactive 3D TopOpt App; (b) Solução obtida por meio do PolyTop; (c) Braço de suspensão automotivo obtido por otimização topológica com uso do OptiStruct®; (d) Solução obtida por meio do GRAND3

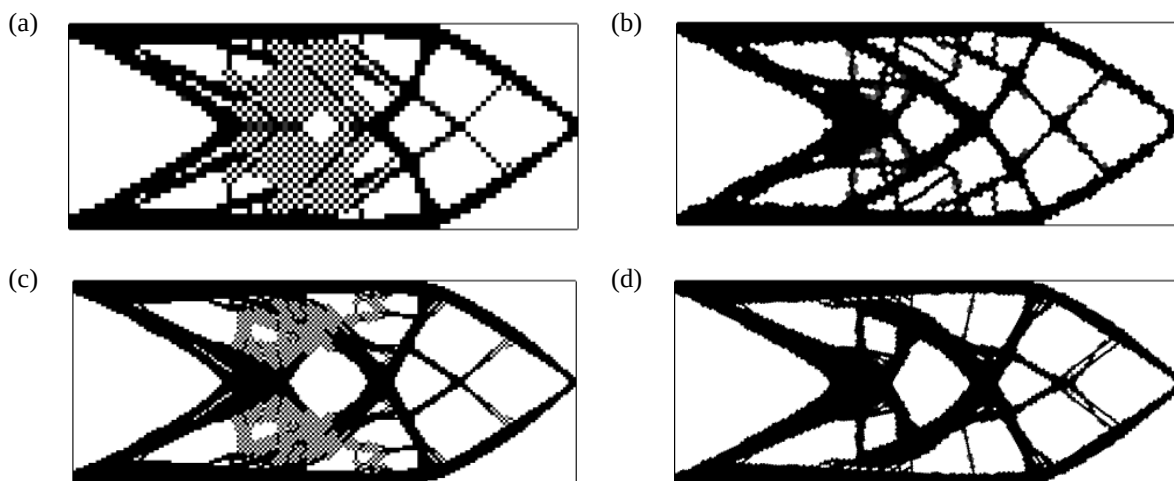


Entre os trabalhos de cunho educacional, destaca-se o artigo apresentado por Sigmund (2001a), que disponibiliza um código de 99 linhas escrito em Matlab para otimização topológica com a formulação elástica clássica do problema de minimização da flexibilidade da estrutura e contribuiu enormemente para a difusão das técnicas de otimização topológica. Esse artigo serviu, e ainda serve, como ponto de partida para muitos pesquisadores que estão iniciando os estudos na área. Após uma década, Andreassen *et al.* (2011) apresentaram a evolução deste trabalho, com a proposta de apresentar melhorias em termos de eficiência computacional em relação ao código anterior disponibilizado. Recentemente, Ferrari e Sigmund (2020) apresentaram um novo código em Matlab de 99 linhas para otimização topológica com a minimização da flexibilidade média mas para problemas tridimensionais.

No presente trabalho utiliza-se como base principal para as implementações computacionais o código educacional `PolyTop`, apresentado por Talischi *et al.* (2012a) para otimização topológica utilizando malha de elementos finitos não-estruturadas composta por elementos poligonais. O estudo de malhas compostas por elementos poligonais em problemas de otimização topológica teve início com o uso de elementos hexagonais regulares (TALISCHI; PAULINO; LE, 2009) e, posteriormente, foram usados elementos finitos poligonais de n arestas (TALISCHI *et al.*, 2009). Com esses dois trabalhos, os autores constataram que o uso de elementos finitos poligonais fornecia duas grandes vantagens: a malha discretizada por esses elementos finitos evitava a formação de um padrão em tabuleiro de xadrez; e tais elementos fornecem melhores condições para discretização de domínios com formas complexas. As soluções em tabuleiro de xadrez constituem um problema de instabilidade numérica comum na abordagem do método da densidade para otimização topológica no qual se tem a alternância de elementos com densidade máxima e mínima formando um padrão e que demanda a adoção de esquemas de regularização que evitem tal conformação. Com o uso de elementos finitos hexagonais ou poligonais, a ligação entre dois elementos é feita necessariamente por uma aresta, evitando assim a formação do referido padrão sem o uso de nenhum esquema de regularização, conforme ilustrado na Figura 1.2. Outra vantagem do uso de elementos finitos poligonais que os autores observaram é a maior liberdade para a orientação dos membros da solução otimizada, facilitando o aparecimento de elementos curvos, como os demandados nas soluções dos problemas de Michell.

Nas soluções apresentadas na Figura 1.2, observa-se que, embora o uso de elementos finitos poligonais resolva o problema das soluções em tabuleiro de xadrez, os resultados são dependentes do refinamento da malha. Essa característica do problema de otimização será discutida em mais detalhes no Capítulo 2 deste trabalho, assim como a forma de solucioná-la

Figura 1.2 - Exemplo da viga cantilever evidenciando a vantagem do uso de elementos poligonais: (a) Malha de elementos finitos Q4 de 100 x 40; (b) Malha composta por 4000 elementos finitos poligonais; (c) Solução obtida com a malha de elementos finitos Q4 de 200 x 80; (d) Malha composta por 16000 elementos finitos poligonais.



Dados do exemplo: Dimensão do domínio: 5 x 2 m ; Fração de volume: 40%; Não foi utilizado nenhum esquema de regularização; Modelo de material SIMP com penalização igual a 3.
Inspirado em Talischi *et al.* (2009)

Uma das principais vantagens do `PolyTop` é a estrutura modular do código, de modo que as rotinas de análise estrutural e o algoritmo de otimização são separados da escolha específica da formulação de otimização topológica adotada. Essa característica foi aproveitada em publicações futuras que deram continuidade na série de artigos educacionais que foram publicados nos anos seguintes. No trabalho de Pereira *et al.* (2016) o código foi adaptado para problemas de minimização da potência dissipada em um escoamento de Stokes, com poucas alterações na rotina de análise. O trabalho de Sanders *et al.* (2018) apresenta o `PolyMat`, a extensão do `PolyTop` para contemplar problemas considerando múltiplos materiais e múltiplas restrições de volume. Recentemente, o `PolyStress` (LONDOÑO; PAULINO, 2021a) apresenta a extensão para problemas de restrição de tensão, considerando materiais com comportamento elástico não-linear e o `PolyDyna` (LONDOÑO; PAULINO, 2021b), apresenta a extensão para problemas que envolvem análise dinâmica.

Para uma visão mais ampla da evolução das técnicas que foram desenvolvidas desde o trabalho seminal de Bendsøe e Kikuchi (1988), recomenda-se a leitura dos artigos publicados abordando o estado da arte sobre o assunto, como os artigos de Rozvany (2009), de Sigmund e Maute (2013) e de Deaton e Grandhi (2014). Os três mostram o grau de maturidade que o campo de pesquisa em otimização topológica atingiu de forma geral ao longo dos anos. Recomenda-se, também, artigos mais recentes de revisão sistemática sobre algum uso, tema ou

técnica específica de otimização topológica como o de Wang *et al.* (2021), sobre os artigos de cunho educacional relativos a otimização estrutural e multidisciplinar; o de Stoiber e Kromoser (2021), sobre o uso de otimização topológica em estruturas de concreto; o de Wu, Sigmund e Groen (2021), sobre otimização topológica de estruturas em multi-escala; e o Mukherjee *et al.* (2021), sobre técnicas e desafios para melhorar o desempenho computacional da otimização topológica em larga escala.

Entretanto, as aplicações de soluções de otimização topológica na indústria ainda se concentram na indústria aeroespacial e automobilística. No campo da engenharia civil, o número de aplicações ainda se mostram mais limitadas. Isso pode ser justificado pela natureza da indústria da construção civil. Um exemplo de aplicação já realizado no campo da engenharia civil, foi uso de soluções de otimização topológica para obter o layout de sistemas de contraventamento de edifícios altos (BEGHINI *et al.*, 2015; STROMBERG *et al.*, 2012).

Amir e Shakour (2018) ressaltam o fato de que no caso específico de estruturas de concreto, além da dificuldade de manufatura de formas complexas, tem-se a falta de acurácia do controle do comportamento do material. Como muitos materiais utilizados no campo da engenharia civil, como o concreto e o aço, não apresentam um comportamento elástico linear, um passo importante para obter soluções de otimização topológica destas estruturas é levar em consideração o comportamento não-linear do material.

Uma quantidade considerável de trabalhos estudou problemas de otimização topológica que consideram não-linearidade física. O trabalho de Schwarz, Maute e Ramm (2001) apresenta a otimização topológica e de forma de estruturas compostas por um material elastoplástico com modelo de von Mises e um encruamento/amolecimento isotrópico.

Mais recentemente, Ivarsson *et al.* (2021) apresentou uma formulação de otimização topológica de estruturas compostas por material elastoplástico com uma restrição no valor do trabalho plástico. Um aspecto interessante do trabalho é a influência do caminho do carregamento aplicado na solução final obtida. Isso é possível porque a análise de sensibilidade é dependente do caminho de carregamento (*path-dependent*) na formulação do problema de otimização.

Alguns trabalhos que consideram um material com comportamento elastoplástico, tem como foco a obtenção de soluções voltadas ao campo da engenharia civil. Bogomolny e Amir (2012) apresentam uma proposta alternativa à interpolação das propriedades do material entre o vazio e o sólido, como é comumente feito em problemas considerando um único material no Método

da Densidade. Neste trabalho, adota-se a interpolação das propriedades do material entre as do concreto e do aço, variando a superfície de escoamento entre o critério de Drucker Prager e o de von Mises. O intuito dos autores era obter o *layout* do reforço em estruturas de concreto armado.

Também com o intuito de obter o design do reforço de estruturas de concreto armado, Amir e Sigmund (2013) consideraram uma malha híbrida de elementos finitos, com a presença de elementos contínuos e elementos de barra, os elementos contínuos representando o concreto e as barras representando o aço. Os autores utilizaram um modelo de dano contínuo com amolecimento por deformação (*strain-softening*) associado aos elementos contínuos e um comportamento elástico linear associado às barras. As variáveis de projeto eram apenas as áreas das barras, sendo então um processo de otimização de treliças.

Alguns trabalhos recentes, como os de Russ e Waisman (2019, 2020) e o de Li, Wu e Yvonnet (2021) exploram o uso de materiais com resistência quase-frágil. O modelo de material adotado baseia-se na abordagem via *phase field* da mecânica da fratura. Nessa abordagem, a superfície da fissura é aproximada por um campo fase escalar, que indica se o material na região está danificado ou não.

Outra abordagem encontrada na literatura para obtenção de solução de otimização topológica de estruturas de concreto armado é a representação bilinear do comportamento do material. Esse modelo consiste na adoção de módulos de elasticidade e coeficientes de Poisson distintos à tração e à compressão, com relação linear entre as tensões e as deformações em cada caso. Du *et al.* (2019) fizeram uso do modelo bilinear isotrópico apresentado por Du *et al.* (2016); enquanto Gaynor, Guest e Moen (2013) e Oliveira (2021) utilizaram o modelo bilinear ortotrópico proposto por Darwin e Pecknold (1974). Em ambos os trabalhos citados, foi utilizada uma formulação híbrida de otimização topológica para obter a representação do caminho das forças no interior de estruturas de concreto armado. Tanto as densidades dos elementos contínuos quanto as áreas das barras são variáveis de projeto do processo de otimização e distribuídas ao mesmo tempo.

Amir e Shakour (2018) apresentaram a proposta de uma formulação de otimização topológica de vigas de concreto protendidas. Para isso, os cabos são representados por elementos de barra com uma força interna, a qual é transferida para o domínio contínuo. Os autores consideraram

como variáveis de projeto a posição vertical dos nós pré-estabelecidos que definem os cabos e as densidades dos elementos contínuos. A estrutura é modelada com um material elástico linear.

No trabalho de Du *et al.* (2019) foi apresentada a formulação do problema de otimização considerando dois materiais e para isso os autores fizeram uso do modelo de penalização proposto por Sigmund (2001b). Sanders, Aguiló e Paulino (2018) apresentam uma formulação na qual é possível considerar m materiais com comportamento elástico linear no processo de otimização com múltiplas restrições de volume definidas de forma arbitrária e solucionar o problema de otimização de forma eficiente com o uso do esquema de atualização proposto por Zhang, Paulino e Ramos Jr. (2018a).

Zhang e Chi (2020) e Zhang, Chi e Paulino (2020) apresentaram uma formulação do problema de otimização, com uma pequena adaptação no modelo de penalização, para considerar materiais com comportamento elástico-não-linear na formulação de múltiplos materiais. No primeiro trabalho os autores consideraram materiais definidos por um modelo constitutivo bilinear e por um modelo constitutivo hiperelástico; e no segundo trabalho os autores consideraram materiais com comportamento hiperelástico.

Giraldo-Londoño e Paulino (2020) apresentaram recentemente uma formulação para considerar materiais viscoelásticos na formulação de múltiplos materiais. Além disso, os autores fizeram uma modificação no esquema de atualização proposto por Zhang, Paulino e Ramos Jr. (2018a).

Considerando o contexto atual da pesquisa considerando múltiplos materiais e o comportamento não-linear, há ainda um campo de estudo pouco explorado em relação à aplicação desses conceitos à obtenção do caminho de forças em estruturas de concreto armado. Esse campo envolve tanto a utilização de modelos que representam o comportamento do material no método da densidade considerando múltiplos materiais quanto na aplicação desses modelos à formulação híbrida. Tais caminhos de força são utilizados no projeto de elementos de concreto armado que não satisfazem as hipóteses de Bernoulli e constituem uma dificuldade natural desse tipo de projeto.

1.1. OBJETIVOS

O objetivo principal deste trabalho é implementar formulações de otimização topológica que considerem a não-linearidade física do material e aplicá-las para obtenção dos caminhos de força em elementos de concreto armado. Essas formulações são implementadas usando duas abordagens de otimização topológica: formulações que consideram múltiplos materiais e múltiplas restrições de volume; e uma formulação híbrida. Pretende-se analisar a influência dessas duas abordagens nos caminhos de força.

Para dar sustentação ao trabalho proposto, são estabelecidos os seguintes objetivos específicos:

- ◆ Implementar a formulação do Método da Densidade do problema de maximização da energia potencial total estacionária considerando: (i) o modelo constitutivo hiperelástico de Ogden compressível, apresentado por Chi *et al.* (2019); e (ii) o modelo constitutivo bilinear apresentado Du *et al.* (2016), a partir da adaptação do código educacional `PolyTop` (TALISCHI *et al.*, 2012a);
- ◆ Implementar a formulação do Método da Densidade do problema de maximização da energia interna de deformação, apresentada por Zhao, Ramos Jr. e Paulino (2019), considerando o modelo constitutivo elástico não-linear com um limite de tensão proposto por Pasquili (2008), a partir da adaptação do código educacional `PolyTop` (TALISCHI *et al.*, 2012a);
- ◆ Implementar os modelos constitutivos elásticos não-lineares citados nos objetivos específicos anteriores considerando o problema de otimização topológica com múltiplos materiais e múltiplas restrições de volume, a partir da adaptação do código educacional `PolyMat` (SANDERS *et al.*, 2018);
- ◆ Implementar a formulação híbrida, com base na formulação de Gaynor, Guest e Moen (2013) e Oliveira (2021), utilizando o modelo bilinear de Du *et al.* (2016), a partir da adaptação do código educacional `PolyTop` (TALISCHI *et al.*, 2012a);

1.2. ESTRUTURA DO TRABALHO

O trabalho está organizado em 7 capítulos. No Capítulo 1 foi apresentada uma introdução sobre o tema e os objetivos do trabalho. Os Capítulos 2, 3 e 4 consistem em capítulos de revisão bibliográfica. No Capítulo 2 é apresentada a concepção do problema de otimização topológica

via Método da Densidade. No Capítulo 3 é apresentada a formulação do problema de maximização da energia potencial total estacionária. No Capítulo 4 é apresentada a formulação do problema de maximização da energia interna de deformação. No Capítulo 5 é apresentada a formulação do problema de otimização com múltiplos materiais e múltiplas restrições de volume. No Capítulo 6 é apresentada a formulação híbrida e no Capítulo 7 são apresentadas as conclusões desta dissertação e propostas para trabalhos futuros. Por fim, 5 apêndices complementam esta dissertação.

CAPÍTULO 2

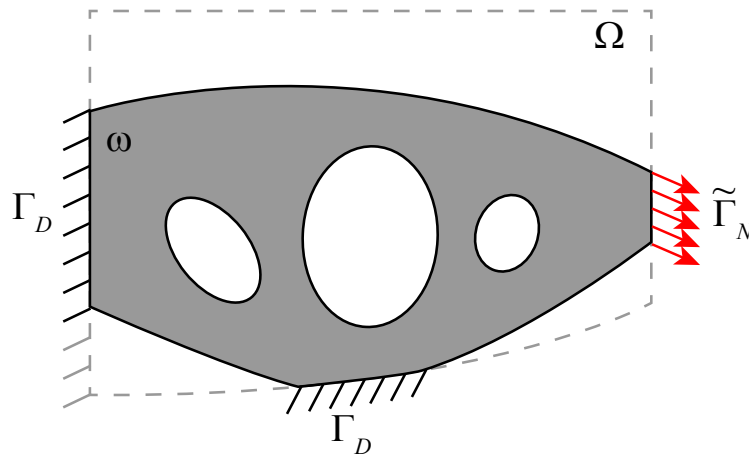
CONCEPÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA PELO MÉTODO DA DENSIDADE

Este capítulo apresenta a concepção do problema de otimização topológica de uma estrutura contínua pela abordagem do Método da Densidade, nos moldes da formulação apresentada por Talischi *et al.* (2012a). A razão por esta escolha se dá pelo fato de que todas as implementações computacionais do presente trabalho tiveram como base o código educacional `PolyTop` que acompanha o referido trabalho.

2.1. INTRODUÇÃO AO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

O problema de otimização topológica (em 2D) tem como objetivo a determinação da forma ótima de um sistema estrutural $\omega \subseteq \mathbb{R}^2$, a partir da minimização de uma função objetivo $f(\omega, \mathbf{u}_\omega)$ sujeita a um conjunto de restrições $g_j(\omega, \mathbf{u}_\omega)$, $j = 1, \dots, nc$, onde nc é o número de restrições do problema. A forma ω é geralmente definida no interior de um domínio estendido $\Omega(\subseteq \mathbb{R}^2)$. A Figura 2.1 ilustra genericamente o problema.

Figura 2.1 - Domínio estendido e condições de contorno



De forma geral, tanto a função objetivo quanto as restrições dependem da forma da estrutura ω e da resposta estrutural da mesma, a qual pode ser avaliada pela solução do problema de valor

de contorno, $\mathbf{u}_\omega$. Portanto, o problema de otimização em sua forma aninhada pode ser definido de acordo com (2.1).

$$\begin{aligned} \text{Obter:} \quad & \omega \in \mathcal{O} \\ \text{Que minimiza:} \quad & f(\omega, \mathbf{u}_\omega) \\ \text{Tal que:} \quad & g_j(\omega, \mathbf{u}_\omega) \leq 0, j = 1, \dots, nc \end{aligned} \quad (2.1)$$

Sendo, $\mathcal{O}$ a representação do espaço das formas admissíveis; $\mathcal{V}_\omega$ o espaço dos deslocamentos admissíveis, definido em (2.2); e $\mathbf{u}_\omega$ o vetor de deslocamentos pertencente a $\mathcal{V}_\omega$.

$$\mathcal{V}_\omega = \left\{ \mathbf{u} \in H^1(\omega, \mathbb{R}^2) : \mathbf{u}|_{\partial\omega \cap \Gamma_D} = \mathbf{0} \right\} \quad (2.2)$$

Em essência, o espaço de deslocamento admissíveis apresentado em (2.2) deve apresentar um campo de deslocamentos cujas derivadas até ordem 1 devem possuir valores finitos (continuidade de ordem 1) e respeitar as condições de contorno essenciais do problema. Além disso, a condição de equilíbrio estático é respeitada pois o vetor de deslocamentos deve satisfazer o problema variacional (2.3).

É importante destacar que, nas aplicações deste trabalho, as forças de corpo são desprezadas.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_\omega &= \arg \min_{\mathbf{u}} \Pi_\omega(\mathbf{u}) \\ \text{com: } \Pi_\omega(\mathbf{u}) &= \int_{\omega} \Psi_0(\mathbf{u}, \mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\tilde{\Gamma}_N} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} dS \end{aligned} \quad (2.3)$$

Onde, Π_ω é a energia potencial total do sistema estrutural ω ; Ψ_0 é a energia de deformação específica do material sólido pelo qual a forma ω é composta; $\mathbf{t}$ são as forças de superfície; Γ_D é a região do contorno da forma em que são aplicadas as condições de contorno essenciais; e $\tilde{\Gamma}_N$ é a região do contorno da forma em que são aplicadas as forças de superfície ($\tilde{\Gamma}_N \subseteq \Gamma_N$).

2.2. PARAMETRIZAÇÃO CONTÍNUA

A formulação do problema (2.1) apresenta dois fatores complicadores em relação às técnicas típicas de discretização para solucionar o problema de otimização (2.1) e o problema variacional (2.3). Tanto a parcela associada à energia interna de deformação quanto o campo dos deslocamentos admissíveis são dependentes da forma ω . Portanto, é conveniente reescrever o

problema variacional em termos do domínio estendido, Ω , e para isso se introduz a função característica $\mathcal{X}_\omega$ associada a ω , a qual é definida de modo que $\mathcal{X}_\omega = 1$, se $\mathbf{x} \in \omega$, e $\mathcal{X}_\omega = 0$, caso contrário:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_\omega &= \arg \min_{\mathbf{u}} \Pi(\mathbf{u}) \\ \text{com: } \Pi(\mathbf{u}) &= \int_{\Omega} \mathcal{X}_\omega \Psi_0(\mathbf{u}, \mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\tilde{\Gamma}_N} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} dS, \mathbf{u}_\omega \in \mathcal{V} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Onde:

$$\mathcal{V} = \left\{ \mathbf{u} \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^2) : \mathbf{u}|_{\Gamma_D} = \mathbf{0} \right\} \quad (2.5)$$

A função característica deve ser definida de tal modo que se obtenha uma forma ω pertencente ao espaço de formas admissíveis, $\mathcal{O}$. Portanto, define-se o espaço admissível $\mathcal{A}_\mathcal{O}$ como:

$$\mathcal{A}_\mathcal{O} = \{ \mathcal{X}_\omega : \omega \in \mathcal{O} \} \quad (2.6)$$

Conforme destacado por Talischi *et al.* (2012a), a introdução da função característica não soluciona todos os problemas associados ao problema de otimização topológica em um meio contínuo. O primeiro problema está associado à existência e à unicidade da solução do problema de valor de contorno definido no domínio estendido (2.4), pois, nas regiões em que a função característica assume um valor nulo não há contribuição da energia interna de deformação para o campo de deslocamentos. Essa situação corresponde à singularidade da matriz de rigidez do problema discretizado em elementos finitos. Para evitar esse tipo de problema e forçar a existência de solução no problema de valor de contorno, adota-se a abordagem de Ersatz:

$$\Pi(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} [\varepsilon + (1-\varepsilon)\mathcal{X}_\omega] \Psi_0(\mathbf{u}, \mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\tilde{\Gamma}_N} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} dS \quad (2.7)$$

Desta forma a parcela $\varepsilon \Psi_0$ preenche as regiões de vazios, fornecendo um valor de rigidez mínimo.

Outra consequência do uso de uma função característica para caracterizar a forma consiste no fato de que tal parametrização leva a um problema de programação inteira. Embora, recentemente, alguns trabalhos resolvam o problema de otimização topológica utilizando variáveis binárias e programação inteira (PICELLI; SIVAPURAM; XIE, 2021; SIVAPURAM;

PICELLI, 2018), a prática mais comum, até o momento, e que será utilizada neste trabalho, é a de se adotar uma parametrização contínua da forma, com $\rho \in [0, 1]$, a qual pode ser interpretada como uma função de densidade que pode assumir valores no intervalo de $[0, 1]$.

Esta reformulação, contudo, deve ser acompanhada pela introdução de uma função de penalização, como uma tentativa de recuperação da natureza binária do problema. Na comunidade de otimização topológica, a função de penalização mais utilizada é o modelo SIMP (do inglês “*Solid Isotropic Material with Penalization*”), proposto separadamente por Bendsøe (1989) e Zhou e Rozvany (1991). Assim, o problema variacional pode ser novamente reescrito na forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \arg \min_{\mathbf{u}} \Pi(\mathbf{u}, \rho) \\ \text{com: } \Pi(\mathbf{u}, \rho) &= \int_{\Omega} [\varepsilon + (1 - \varepsilon) \rho^p] \Psi_0(\mathbf{u}, \mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_N} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} dS \end{aligned} \quad (2.8)$$

Onde, p é o coeficiente de penalização do modelo SIMP ($p > 1$).

2.3. REGULARIZAÇÃO DA FUNÇÃO DE DENSIDADE

É bem conhecido que o problema de otimização topológica na abordagem no Método da Densidade é um problema mal condicionado, e desde o trabalho pioneiro de Bendsøe e Kikuchi (1988) propostas de solução deste problema são apresentadas. Sigmund e Petersson (1998) apresentaram discussões interessantes sobre as origens e soluções existentes na época da publicação sobre os problemas de instabilidade numérica em otimização topológica. O mau condicionamento do problema pode ser entendido pela não existência ou não-unicidade da forma ótima. Pode-se dizer, de forma simplificada, que o motivo de tal mau condicionamento é que, dado um determinado *layout*, a introdução de mais furos sem alterar o volume da estrutura geralmente acarreta um aumento na medida da função objetivo (SIGMUND; PETERSSON, 1998).

Talischi *et al.* (2012a) também trazem uma discussão sobre o problema de mau condicionamento e apresentam técnicas de solução mais atualizadas. A técnica implementada no PolyTop e, também, utilizada neste trabalho, é o uso de uma função de mapeamento, $\mathcal{P}_F$, para imposição da regularização da função de densidade, ρ . Essa proposta foi apresentada por Bourdin (2001) inspirado nos trabalhos de Bruns e Tortelli (2001) e Sigmund (1994), e é

popularmente conhecida como filtro de densidade. Conforme destacado por Talischi *et al.* (2012a), do ponto de vista prático, a restrição das variações da função de densidade, pelo uso de uma função de mapeamento está relacionada à imposição de restrições de manufatura em relação às geometrias admissíveis consideradas. Com a função de regularização, a função de densidade passa a ser definida conforme a equação (2.9), na qual η representa a função de projeto.

$$\rho = \mathcal{P}_F(\eta) \quad (2.9)$$

Com o uso do mapeamento (2.9), a função de densidade passa a ter uma variação suave ao longo do domínio estendido, sendo esta característica herdada do mapeamento das funções de projeto. O mapeamento, proposto por Bourdin (2001), é definido por uma convolução das funções de projeto com um filtro definido pelo operador integral:

$$P_F(\eta)(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} F(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) \eta(\bar{\mathbf{x}}) d\bar{\mathbf{x}}. \quad (2.10)$$

Uma escolha comum é o filtro F linear, definido por:

$$F(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = c(\mathbf{x}) \max\left(1 - \frac{|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}|}{R}, 0\right) \quad (2.11)$$

Onde $c(\mathbf{x})$ é definido como um coeficiente de normalização, de modo que:

$$\int_{\Omega} F(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) d\bar{\mathbf{x}} = 1 \quad (2.12)$$

Uma das consequências da aplicação do filtro (2.11) é que ele impõe que os membros na solução topológica final possuam uma dimensão mínima igual ao raio (R) considerado. É possível, ainda, utilizar mapeamentos de modo que, da mesma maneira, sejam impostas outras condições de manufatura, como simetria e repetição de padrão (ALMEIDA; PAULINO; SILVA, 2010) e gradação de padrão (STROMBERG *et al.*, 2011). Para isso define-se outro operador $\mathcal{P}_S(\eta(\mathbf{x}))$ (TALISCHI *et al.*, 2012a). Por exemplo, caso se deseje impor a simetria em relação ao eixo x_1 , o operador é definido como:

$$P_S(\eta(\mathbf{x})) = \eta(x_1, |x_2|) \quad (2.13)$$

É importante que, quando aplicada uma condição extra de manufatura, que seja feita sua combinação com o filtro de regularização, por meio da composição dos dois mapeamentos. Assim, é possível definir o espaço das funções de densidade admissíveis, conforme:

$$\mathcal{A} = \{ \mathcal{P}(\eta) : \eta \in L^\infty(\Omega; [0,1]) \}, \text{ com } \mathcal{P}(\eta) = (\mathcal{P}_F \circ \mathcal{P}_S)(\eta) \quad (2.14)$$

O problema de otimização é, então, reescrito em termos da parametrização contínua:

$$\begin{aligned} \text{Obter:} \quad & \rho \in \mathcal{A} \\ \text{Que minimiza:} \quad & f(\rho, \mathbf{u}) \\ \text{Tal que:} \quad & g_j(\rho, \mathbf{u}) \leq 0, j = 1, \dots, nc \end{aligned} \quad (2.15)$$

Nesse caso, o campo de deslocamentos $\mathbf{u}$ obtido pela solução do problema variacional:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \arg \min_{\mathbf{u}} \Pi(\mathbf{u}, \rho) \\ \text{com: } \Pi(\mathbf{u}, \rho) &= \int_{\Omega} m_E(\rho) \Psi_0(\mathbf{u}, \mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\tilde{\Gamma}_N} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} dS \end{aligned} \quad (2.16)$$

Onde $m_E(\rho)$ é a função de interpolação do material utilizada para o cálculo da rigidez em um ponto com base na densidade de material do ponto $\mathbf{x}$.

É interessante definir também uma função de interpolação do volume em um ponto, baseando-se na medida da função de densidade. É comum trabalhar com uma relação direta na forma:

$$m_V(\rho) = \rho \quad (2.17)$$

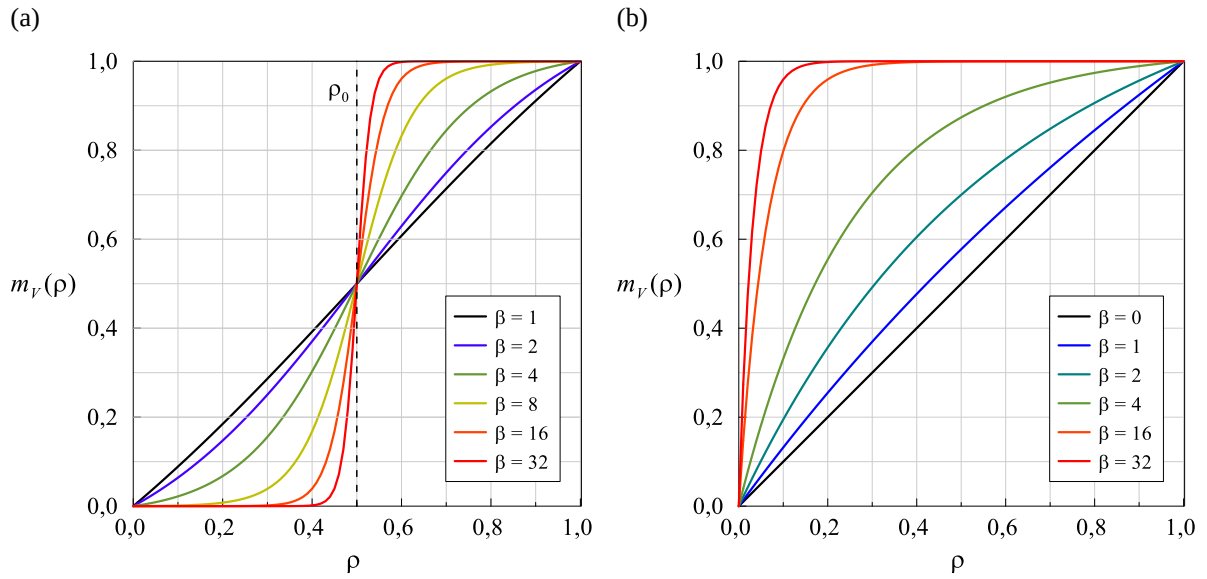
Porém, a fim de obter soluções mais próximas o possível de vazio e sólido (preto e branco), pode-se obter a fração de volume usando funções de interpolação não-lineares do tipo Heaviside. São apresentadas em (2.18) e (2.19), as propostas de Wang *et al.* (2011) e Guest, Prévost e Belytschko (2004), respectivamente.

$$m_V(\rho) = \frac{\tanh(\beta \rho_0) - \tanh(\beta(\rho - \rho_0))}{\tanh(\beta \rho_0) + \tanh(\beta(1 - \rho_0))} \quad (2.18)$$

$$m_V(\rho) = 1 - e^{-\beta \rho} + \rho e^{-\beta} \quad (2.19)$$

As Figura 2.2 (a) e (b) ilustram o comportamento das funções (2.18) e (2.19), respectivamente.

Figura 2.2 - Comportamento das funções de interpolação não lineares do volume em um ponto



As funções de interpolação não lineares do volume forçam que a fração de volume em um ponto assuma os valores próximos aos extremos 0 e 1. Um aspecto interessante da função proposta por Wang *et al.* (2011) é que o parâmetro ρ_0 controla o valor de densidade, ρ , a partir do qual a fração de volume será forçada a assumir um valor próximo ao limite superior ou inferior. Além disso, o parâmetro β controla o grau de não-linearidade da função, de modo que à medida que seu valor aumenta, o comportamento da função de interpolação aproxima-se do comportamento de uma função do tipo Heaviside.

Caso o problema (2.15) esteja sujeito a uma única de restrição, que limite a fração de volume de material no domínio estendido (V_{max}), esta pode ser representada na forma:

$$g(\rho) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} m_v(\rho) d\mathbf{x} - V_{max} \quad (2.20)$$

É importante destacar que o cálculo da função de interpolação do material para o cálculo da rigidez em um ponto deve ser feito com a fração de volume interpolada, principalmente no caso em que é utilizada uma função de interpolação não-linear para obtenção da fração de volume. Assim:

$$m_E(\rho) = \begin{cases} \varepsilon + (1-\varepsilon) [m_v(\rho)]^p & \text{(SIMP)} \\ \varepsilon + (1-\varepsilon) \frac{m_v(\rho)}{1 + p_0 [1 - m_v(\rho)]} & \text{(RAMP)} \end{cases} \quad (2.21)$$

Logo, o problema de otimização considerando a restrição de volume (2.20) é apresentado em:

$$\begin{aligned}
 \text{Obter:} \quad & \rho \in \mathcal{A} \\
 \text{Que minimiza:} \quad & f(\rho, \mathbf{u}) \\
 \text{Tal que:} \quad & g(\rho) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} m_V(\rho) d\mathbf{x} - V_{max} \leq 0 \\
 \text{Com:} \quad & \mathbf{u} = \arg \min_{\mathbf{u}} \Pi(\mathbf{u}, \rho), \mathbf{u} \in \mathcal{V} \\
 & \Pi(\mathbf{u}, \rho) = \int_{\Omega} m_E(\rho) \Psi_0(\mathbf{u}, \mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\tilde{\Gamma}_N} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} dS
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

A função objetivo em (2.22) será especificada posteriormente de acordo com cada uma das formulações estudadas.

2.4. DISCRETIZAÇÃO

Para solucionar o problema de otimização (2.22) de forma numérica, é necessário realizar a discretização tanto do campo de deslocamentos $\mathcal{V}$ quanto no espaço de projeto $\mathcal{A}$ em Ω . Por conveniência, neste trabalho, a mesma discretização é utilizada para os dois campos.

O domínio estendido, Ω , é discretizado em uma malha com dimensão característica igual a h , resultando na divisão do domínio $\mathcal{T}_h = \{\Omega_l\}_{l=1}^N$. A divisão do domínio deve ser tal que $\Omega_k \cap \Omega_l = \emptyset, \forall k \neq l$. Usando a divisão $\mathcal{T}_h$, define-se a discretização do espaço de projeto $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}_h = \left\{ \mathcal{P}(\eta_h) : 0 \leq \eta_h \leq 1, \eta_h|_{\Omega_l} = \text{const} \forall l \right\}, \text{ com } \rho_h = \mathcal{P}_F(\eta_h) \tag{2.23}$$

A função de projeto discretizada η_h é escrita como:

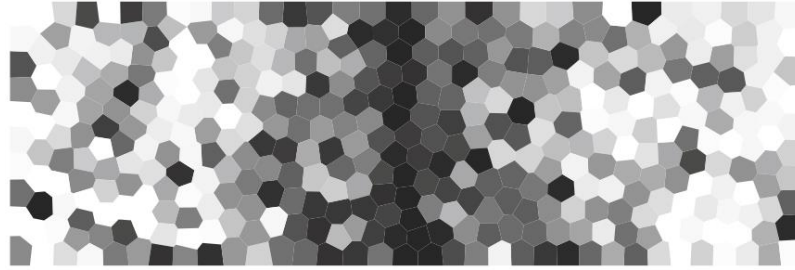
$$\eta_h = \sum_{l=1}^N z_l \mathcal{X}_{\Omega_l}(\mathbf{x}) \tag{2.24}$$

Onde, $\mathcal{X}_{\Omega_l}(\mathbf{x})$ corresponde à função característica associada ao elemento Ω_l .

Se $\mathbf{x}$ for uma posição dentro de Ω_l então a função característica é igual a 1, caso contrário é nula. A variável z_l corresponde ao valor constante que η_h assume em Ω_l , e seu conjunto

$\mathbf{z} = (z_l)_{l=1}^N$ corresponde ao vetor de variáveis de projeto do problema de otimização. A Figura 2.3 ilustra uma função de projeto discretizada determinado por valores aleatórios de z_l .

Figura 2.3 - Exemplo: discretização da função de projeto η_h



Fonte: Talischi *et al.* (2012a)

Ao aplicar o filtro de regularização diretamente em (2.24), obtém-se uma função de densidade ρ_h cujo valor não é constante no elemento Ω_l , devido à definição do operador integral de regularização (2.10). Esse comportamento é ilustrado na Figura 2.4.

Figura 2.4 - Exemplo do efeito da aplicação do filtro de regularização diretamente em η_h da Figura 2.3



Fonte: Talischi *et al.* (2012a)

Em termos práticos, não é interessante que os valores das densidades variem no interior dos elementos. Para evitar esse comportamento, é preciso substituir a função de densidade ρ_h por uma função que possua valores constantes em cada elemento finito:

$$\tilde{\rho}_h(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^N y_l \mathcal{X}_{\Omega_l}(\mathbf{x}) \quad (2.25)$$

Sendo y_l o valor da densidade do elemento l avaliada no centroide $\mathbf{x}_l^*$ do elemento Ω_l :

$$y_l = \rho_h(\mathbf{x}_l^*) \quad (2.26)$$

Para obtenção de um campo de densidade em que as densidades em cada elemento Ω_l são constantes, é preciso que o filtro de regularização seja discretizado:

$$y_l = \rho_h(\mathbf{x}_l^*) = \int_{\Omega} F(\mathbf{x}_l^*, \bar{\mathbf{x}}) \eta_h(\bar{\mathbf{x}}) d\bar{\mathbf{x}} \quad (2.27)$$

Substituindo-se (2.24) em (2.27) e definindo P_{lk} como em (2.29), obtém-se a equação (2.30), representada em forma matricial na equação (2.31).

$$y_l = \sum_{k=1}^N z_k \int_{\Omega} F(\mathbf{x}_l^*, \bar{\mathbf{x}}) \mathcal{X}_{\Omega_k}(\bar{\mathbf{x}}) d\bar{\mathbf{x}} = \sum_{k=1}^N z_k \int_{\Omega_k} F(\mathbf{x}_l^*, \bar{\mathbf{x}}) d\bar{\mathbf{x}} \quad (2.28)$$

$$P_{lk} = \int_{\Omega_k} F(\mathbf{x}_l^*, \bar{\mathbf{x}}) d\bar{\mathbf{x}} \quad (2.29)$$

$$y_l = \sum_{k=1}^N z_k P_{lk} \quad (2.30)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{P} \mathbf{z} \quad (2.31)$$

As componentes da matriz $\mathbf{P}$ (P_{lk}), definidas em (2.29), são calculadas por:

$$P_{lk} = \frac{\bar{w}_{lk}}{\sum_{j=1}^N \bar{w}_{lj}} \quad (2.32)$$

Sendo $\bar{w}_{lk}$:

$$\bar{w}_{lk} = \max \left(0, 1 - \frac{\|\mathbf{x}_l - \mathbf{x}_k\|}{R} \right) \quad (2.33)$$

Como as componentes P_{lk} são independentes das variáveis de projeto $\mathbf{z}$, esses valores podem ser calculados apenas uma vez no início do processo de otimização. Além disso, muitas componentes da matriz $\mathbf{P}$ são nulas, tornando interessante que seja utilizado o armazenamento como matriz esparsa.

O efeito da discretização do filtro de regularização de modo que a função de densidade apresente valores constantes no interior do elemento é ilustrado na Figura 2.5 e a representação da operação de regularização na forma discreta é apresentada na Figura 2.6

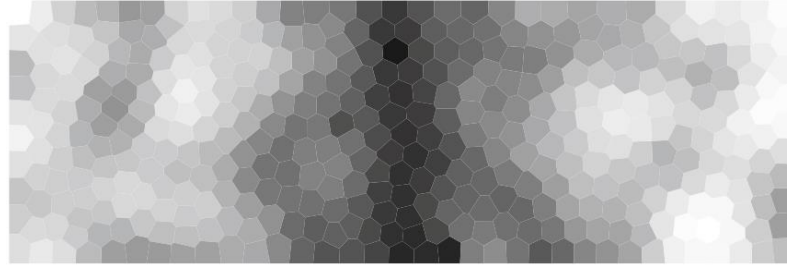
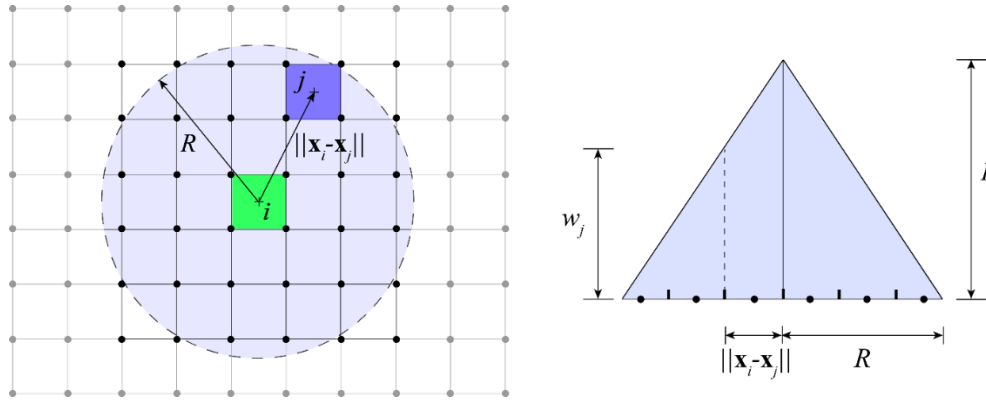
Figura 2.5 - Exemplo do efeito da aplicação do filtro de regularização discretizado em η_h da Figura 2.3Fonte: Talischi *et al.* (2012a)

Figura 2.6 - Ilustração da definição dos fatores peso do filtro de regularização



Por fim, para solucionar o problema variacional em (2.22), o campo de deslocamentos $\mathcal{V}$ também é discretizado utilizando a divisão $\mathcal{T}_h$. O objetivo do problema variacional é obter o $\mathbf{u}_h$ pertencente ao espaço $\mathcal{V}_h$:

$$\mathcal{V}_h = \text{span} \{ \mathbf{N}_i \}_{i=1}^{N_{GL}} \quad (2.34)$$

Em (2.34) o espaço de deslocamentos admissíveis discretizado é definido como uma combinação linear (representada por *span*) dos vetores $\mathbf{N}_i$, sendo N_{GL} o número de graus de liberdade de deslocamentos do problema. Usando o procedimento padrão de elementos finitos, $\mathbf{N}_i$ consiste no vetor das funções de forma, assim temos:

$$\mathbf{u}_h = \sum_{i=1}^{N_{GL}} U_i \mathbf{N}_i(\mathbf{x}) \quad (2.35)$$

Portanto, substituindo (2.35) no problema variacional, chega-se a:

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \arg \min_{\mathbf{U}} \Pi(\mathbf{z}, \mathbf{U}) \text{ , com} \\ \Pi(\mathbf{z}, \mathbf{U}) &= \sum_{l=1}^N \int_{\Omega_l} m_E(y_l) \Psi_0(\mathbf{u}_l, \mathbf{x}) d\mathbf{x} - \mathbf{F}_{ext} \cdot \mathbf{U} \end{aligned} \quad (2.36)$$

Onde, $\mathbf{U} = \{U_i\}_{i=1}^{N_{GL}}$ é o vetor de deslocamentos nodais e $\mathbf{u}_l$ é o vetor de deslocamentos nodais associados ao elemento Ω_l . Além disso, as componentes do vetor de forças externas $\mathbf{F}_{ext}$ são definidas por:

$$(\mathbf{F}_{ext})_i = \int_{\tilde{\Gamma}_N} \mathbf{t} \cdot \mathbf{N}_i dS \quad (2.37)$$

A aplicação da condição de estacionariedade em (2.36) fornece a equação de equilíbrio do problema:

$$\frac{\partial \Pi(\mathbf{z}, \mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} = \mathbf{0} \rightarrow \sum_{l=1}^N \int_{\Omega_l} m_E(y_l) \frac{\partial \Psi_0(\mathbf{u}_l, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{u}_l} d\mathbf{x} - \mathbf{F}_{ext} = \mathbf{0} \quad (2.38)$$

A derivada da energia de deformação específica em relação ao vetor de deslocamentos nodais associados ao elemento é calculada conforme (2.39).

$$\frac{\partial \Psi_0(\mathbf{u}_l, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{u}_l} = \frac{\partial \Psi_0(\mathbf{u}_l, \mathbf{x})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_l(\mathbf{u}_l, \mathbf{x})} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_l(\mathbf{u}_l, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{u}_l} \quad (2.39)$$

O vetor de deformações de um elemento l , $\boldsymbol{\varepsilon}_l$, é calculado a partir do vetor de deslocamentos nodais associados ao elemento, $\mathbf{u}_l$, utilizando a matriz de compatibilidade cinemática $\mathbf{B}_l$, considerando a hipótese de pequenas deformações, conforme apresentado em (2.40).

$$\boldsymbol{\varepsilon}_l(\mathbf{u}_l, \mathbf{x}) = \mathbf{B}_l(\mathbf{x}) \mathbf{u}_l \quad (2.40)$$

Para materiais com comportamento elástico, seja linear ou não-linear, o vetor de tensões de Cauchy pode ser obtido a partir da energia de deformação específica:

$$\boldsymbol{\sigma}_l(\mathbf{u}_l, \mathbf{x}) = \frac{\partial \Psi_0(\mathbf{u}_l, \mathbf{x})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_l} \quad (2.41)$$

Assim:

$$\frac{\partial \Psi_0(\mathbf{u}_l, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{u}_l} = \boldsymbol{\sigma}_l(\mathbf{u}_l, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{B}_l(\mathbf{x}) \quad (2.42)$$

Por fim, a equação de equilíbrio (2.38) pode ser reescrita como em (2.43), com o vetor das forças internas, $\mathbf{F}_{int}$, obtido conforme a equação (2.44).

$$\mathbf{F}_{int}(\mathbf{z}, \mathbf{U}) - \mathbf{F}_{ext} = \mathbf{0} \quad (2.43)$$

$$\mathbf{F}_{int}(\mathbf{z}, \mathbf{U}) = \sum_{l=1}^N \int_{\Omega_l} m_E(y_l) \boldsymbol{\sigma}_l(\mathbf{u}_l, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{B}_l(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (2.44)$$

Destaca-se que o somatório em (2.44) representa um processo de montagem, onde as contribuições de cada elemento são somadas em seus respectivos graus de liberdade.

Por fim, o problema de otimização (2.22) é reescrito de forma discreta:

Obter: $\mathbf{z}$

Que minimiza: $f(\mathbf{z}, \mathbf{U})$

$$\text{Tal que: } g(\mathbf{z}) = \frac{\mathbf{A}^T m_V(\mathbf{Pz})}{\mathbf{A}^T \mathbf{I}} - V_{max} \leq 0 \quad (2.45)$$

$$0 \leq z_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, N$$

Com: $\mathbf{F}_{int}(\mathbf{z}, \mathbf{U}) = \mathbf{F}_{ext}$

Onde o $\mathbf{A} = \{|\Omega_l|\}_{l=1}^N$ é o vetor composto pelas áreas dos elementos. O vetor de deslocamentos nodais $\mathbf{U}$ é obtido através da solução do sistema de equações de equilíbrio.

2.5. ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

Para utilizar um algoritmo de otimização baseado em informações dos gradientes do problema, faz-se necessária a análise de sensibilidade do problema de otimização. A sensibilidade da função objetivo é calculada aplicando a regra da cadeia:

$$\frac{\partial f(\mathbf{z}, \mathbf{U})}{\partial z_k} = \sum_{l=1}^N \left(\frac{\partial f(\mathbf{z}, \mathbf{U})}{\partial E_l} \frac{\partial E_l}{\partial z_k} + \frac{\partial f(\mathbf{z}, \mathbf{U})}{\partial V_l} \frac{\partial V_l}{\partial z_k} \right) \quad (2.46)$$

Ou em forma vetorial:

$$\frac{\partial f(\mathbf{z}, \mathbf{U})}{\partial \mathbf{z}} = \frac{\partial f(\mathbf{z}, \mathbf{U})}{\partial \mathbf{E}} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{z}} + \frac{\partial f(\mathbf{z}, \mathbf{U})}{\partial \mathbf{V}} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{z}} \quad (2.47)$$

Onde os vetores $\mathbf{E}$ e $\mathbf{V}$ são definidos por $\mathbf{E} = m_E(\mathbf{y})$ e $\mathbf{V} = m_V(\mathbf{y})$.

As derivadas da função objetivo em relação aos vetores $\mathbf{E}$ e $\mathbf{V}$ serão definidas para cada uma das formulações apresentadas a seguir. Porém as derivadas dos vetores $\mathbf{E}$ e $\mathbf{V}$ em relação às variáveis de projeto independem da escolha da função objetivo, e são definidas como:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{z}_k} = \frac{\partial m_E(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{z}_k} = \sum_{l=1}^N \frac{dm_E(y_l)}{dy_l} \frac{\partial y_l}{\partial \mathbf{z}_k} = \sum_{l=1}^N \frac{dm_E(y_l)}{dy_l} P_{lk} \quad (2.48)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{z}_k} = \frac{\partial m_V(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{z}_k} = \sum_{l=1}^N \frac{dm_V(y_l)}{dy_l} \frac{\partial y_l}{\partial \mathbf{z}_k} = \sum_{l=1}^N \frac{dm_V(y_l)}{dy_l} P_{lk} \quad (2.49)$$

Ou de forma vetorial:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{z}} = \mathbf{P}^T J_{m_E}(\mathbf{y}) \quad (2.50)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{z}} = \mathbf{P}^T J_{m_V}(\mathbf{y}) \quad (2.51)$$

Onde J_{m_E} e J_{m_V} são as diagonais das matrizes jacobianas de m_E e m_V , de modo que $J_{m_E} = \text{diag}(m'_E(y_1), \dots, m'_E(y_N))$ e $J_{m_V} = \text{diag}(m'_V(y_1), \dots, m'_V(y_N))$.

A sensibilidade da restrição de volume pode ser definida de forma genérica como em (2.52).

$$\frac{\partial g(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} = \frac{\partial g(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{E}} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{z}} + \frac{\partial g(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{V}} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{z}} \quad (2.52)$$

Sendo:

$$\frac{\partial g(\mathbf{z})}{\partial E_l} = 0 \quad (2.53)$$

$$\frac{\partial g(\mathbf{z})}{\partial V_l} = \frac{A_l}{\mathbf{A}^T \mathbf{I}} \quad (2.54)$$

2.6. O PROBLEMA DE MINIMIZAÇÃO DA FLEXIBILIDADE ELÁSTICA

Na formulação elástica clássica do problema de otimização topológica, a maximização da rigidez global da estrutura é obtida a partir de um problema de minimização da flexibilidade média, conforme apresentado em (2.55).

Obter: $\mathbf{z}$

Que minimiza: $f(\mathbf{z}, \mathbf{U}) = \mathbf{F}_{ext}^T \mathbf{U}$

Tal que: $g(\mathbf{z}) = \frac{\mathbf{A}^T m_v(\mathbf{P} \mathbf{z})}{\mathbf{A}^T \mathbf{I}} - V_{max} \leq 0$ (2.55)

$$0 \leq z_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, N$$

Com: $\mathbf{K}(\mathbf{z}) \mathbf{U} = \mathbf{F}_{ext}$

Nesta formulação admite-se que o material apresente um comportamento elástico linear, portanto o vetor de forças internas $\mathbf{F}_{int}(\mathbf{z}, \mathbf{U})$, da relação de equilíbrio da equação (2.45), pode ser definido diretamente pelo produto da matriz de rigidez elástica da estrutura, $\mathbf{K}(\mathbf{z})$, pelo vetor de deslocamentos nodais, $\mathbf{U}$.

Conforme mencionado anteriormente, para completar o cálculo da sensibilidade da função objetivo é preciso definir as seguintes derivadas:

$$\frac{\partial f(\mathbf{z}, \mathbf{U})}{\partial E_l} = \mathbf{F}_{ext}^T \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial E_l} \quad (2.56)$$

$$\frac{\partial f(\mathbf{z}, \mathbf{U})}{\partial V_l} = 0 \quad (2.57)$$

A derivada da função objetivo em relação ao parâmetro de rigidez E_l é calculada pelo método direto. Primeiro, substitui a relação de equilíbrio, apresentada em (2.55), em (2.56).

$$\frac{\partial f(\mathbf{z}, \mathbf{U})}{\partial E_l} = \mathbf{U}^T \mathbf{K}(\mathbf{z}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial E_l} \quad (2.58)$$

A derivada da relação de equilíbrio fornece:

$$\frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{z})}{\partial E_l} \mathbf{U} + \mathbf{K}(\mathbf{z}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial E_l} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{K}(\mathbf{z}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial E_l} = -\frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{z})}{\partial E_l} \mathbf{U} \quad (2.59)$$

Logo, tem-se que:

$$\frac{\partial f(\mathbf{z}, \mathbf{U})}{\partial E_l} = -\mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial E_l} \mathbf{U} \quad (2.60)$$

Como a matriz de rigidez global da estrutura envolve um processo de montagem das matrizes dos elementos, conforme a equação (2.61), chega-se à equação (2.62).

$$\mathbf{K}(\mathbf{z}) = \sum_{l=1}^N m_E(y_l) \mathbf{k}_l \quad (2.61)$$

$$\frac{\partial f(\mathbf{z}, \mathbf{U})}{\partial E_l} = -\mathbf{u}_l^T \mathbf{k}_l \mathbf{u}_l \quad (2.62)$$

A sensibilidade da função objetivo é estritamente não-positiva e a sensibilidade da restrição de volume é estritamente positiva. Estas condições permitem o uso do OC como algoritmo de otimização. A dedução do algoritmo é apresentada no Apêndice A deste trabalho.

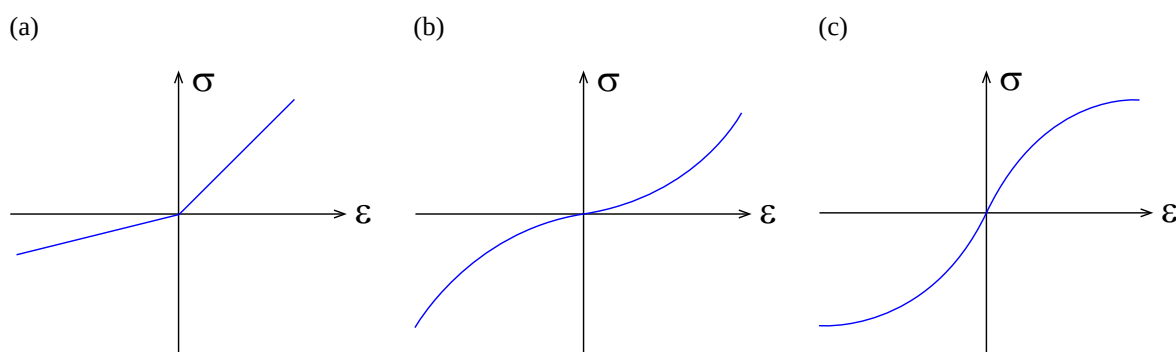
CAPÍTULO 3

PROBLEMA DE MAXIMIZAÇÃO DA ENERGIA POTENCIAL TOTAL ESTACIONÁRIA

Neste capítulo apresenta-se a revisão bibliográfica e a formulação matemática sobre os modelos constitutivos utilizados neste trabalho na formulação do problema de maximização da energia potencial total estacionária.

Uma vez que é considerada a hipótese de pequenos deslocamentos e pequenas deformações, o comportamento não-linear da estrutura é definido em função do modelo constitutivo adotado. Definem-se em duas categorias os modelos constitutivos elásticos avaliados no presente trabalho: modelos que não apresentam um limite de tensão e modelos que apresentam um limite de tensão, conforme ilustrado na Figura 3.1 para um estado uniaxial. Os modelos constitutivos bilineares e os hiperelásticos, cujos comportamentos típicos são ilustrados nas Figura 3.1 (a) e (b), respectivamente, não apresentam um limite de tensão, e serão abordados neste capítulo. O modelo constitutivo com limite de tensão, semelhante ao da Figura 3.1 (c) será abordado no Capítulo 4.

Figura 3.1 - Exemplos de diferentes comportamentos tensão-deformação em estado uniaxial: (a) Material com comportamento bilinear; (b) Material com comportamento hiperelástico; (c) Material elástico com limite de tensão



Para a categoria de materiais cujo comportamento tensão-deformação não apresenta um patamar de resistência, o problema de otimização adotado é o de maximização da energia potencial total estacionária, o qual é equivalente ao de maximização da rigidez da estrutura (CHI *et al.*, 2019; KLARBRING; STRÖMBERG, 2012).

3.1. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

Seguindo a formulação aninhada apresentada por Klarbring e Stromberg (2012) e Chi *et al.* (2019), adota-se o problema de otimização (3.1).

Obter: $\mathbf{z}$

Que minimiza: $f(\mathbf{z}, \mathbf{U}) = -\Pi_{min}(\mathbf{z}, \mathbf{U})$

Tal que: $g(\mathbf{z}) = \frac{\mathbf{A}^T m_V(\mathbf{P} \mathbf{z})}{\mathbf{A}^T \mathbf{I}} - V_{max} \leq 0$ (3.1)

$$0 \leq z_i \leq 1, i = 1, \dots, N$$

Com: $\mathbf{F}_{int}(\mathbf{z}, \mathbf{U}) = \mathbf{F}_{ext}$

Onde, $\mathbf{z}$ corresponde ao vetor de variáveis de projeto; f é a função objetivo; Π_{min} consiste na energia potencial total estacionária; $\mathbf{U}$ corresponde ao vetor de deslocamentos nodais; g é a restrição de volume; $\mathbf{A}$ corresponde ao vetor com as áreas dos elementos contínuos; $\mathbf{P}$ corresponde à matriz com os pesos do filtro de densidade; $\mathbf{I}$ é a matriz identidade; V_{max} consiste na fração de volume do domínio estendido prescrita; N é o número de variáveis de projeto; $\mathbf{F}_{int}$ corresponde ao vetor de forças internas nodais; e $\mathbf{F}_{ext}$ corresponde ao vetor de forças externas nodais.

A energia potencial total utilizada na função objetivo é estacionária pois ela é calculada com o vetor de deslocamentos que satisfaz a relação de equilíbrio do problema.

A sensibilidade da função objetivo foi apresentada no item 2.5 para uma função genérica, e para completar o seu cálculo é necessário determinar a derivada da função objetivo em relação ao parâmetro de rigidez, E_l , conforme a equação (3.2).

$$\frac{\partial f(\mathbf{z}, \mathbf{U})}{\partial E_l} = - \frac{\partial \Pi_{min}(\mathbf{z}, \mathbf{U})}{\partial E_l} \bigg|_{\mathbf{U}=const.} - \frac{\partial \Pi_{min}(\mathbf{z}, \mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial E_l} \quad (3.2)$$

A primeira parcela do lado direito da equação (3.2) corresponde a parte explícita da derivada da função objetivo em relação ao parâmetro de rigidez, E_l ; e a segunda parcela corresponde a parte implícita da derivada. Devido à condição de equilíbrio, a derivada da função objetivo em relação ao vetor de deslocamentos é nula. Deste modo, a derivada da função objetivo em relação ao parâmetro de rigidez E_l é dada por (3.3).

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(\mathbf{z}, \mathbf{U})}{\partial E_l} &= - \frac{\partial \Pi_{min}(\mathbf{z}, \mathbf{U})}{\partial E_l} \bigg|_{\mathbf{U}=\text{const.}} \\
&= - \frac{\partial}{\partial E_l} \left[\sum_{l=1}^N \int_{\Omega_l} E_l \Psi_0(\mathbf{u}_l, \mathbf{x}) d\mathbf{x} - \mathbf{F}_{ext} \cdot \mathbf{U} \right] = - \int_{\Omega_l} \Psi_0(\mathbf{u}_l, \mathbf{x}) d\mathbf{x}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Conforme destacado por Klarbring e Stromberg (2012), uma das vantagens dessa formulação utilizando a energia potencial total estacionária como função objetivo consiste em não demandar um vetor adjunto para o cálculo da sensibilidade.

Além disso, a sensibilidade da função objetivo é estritamente não-positiva, haja vista que a integração da energia interna de deformação específica no volume do elemento sempre será não-negativa para materiais com comportamento elástico. Como a restrição de volume do problema (3.1) é a mesma da formulação elástica clássica (2.55), a sua sensibilidade é a mesma apresentada no Capítulo 2. Essas condições permitem que seja adotado o OC como algoritmo de atualização das variáveis de projeto, apresentado no Apêndice A deste trabalho, para solução do problema de otimização.

3.2. MODELOS CONSTITUTIVOS

Este item apresenta os modelos constitutivos utilizados no problema de maximização da energia potencial total. Dois modelos constitutivos são considerados: um modelo bilinear e um modelo hiperelástico, utilizando o modelo de Ogden compressível. Ambos os modelos são elásticos e isotrópicos.

Como admite-se a hipótese de pequenas deformações, o tensor de deformações infinitesimais é calculado a partir da parcela simétrica do gradiente do vetor de deslocamentos conforme apresentado em (3.4).

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \tag{3.4}$$

Para formulação de ambos os modelos constitutivos, é conveniente escrever o tensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ em sua forma espectral, conforme (3.5).

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{\alpha=1}^3 \bar{\varepsilon}_{\alpha} \mathbf{n}_{\alpha} \otimes \mathbf{n}_{\alpha} \quad (3.5)$$

Onde, $\bar{\varepsilon}_{\alpha}$ é a deformação principal α e $\mathbf{n}_{\alpha}$ a direção principal associada a $\bar{\varepsilon}_{\alpha}$. Além disso, destaca-se que o operador $\otimes$ representa um produto tensorial.

Um outro aspecto em comum dos modelos constitutivos apresentados nos itens a seguir é que ambos são definidos com base no estado de tensão e deformação no sistema principal. Uma vez que ambos os modelos possuem um comportamento elástico, conforme definido em (2.41), o tensor de tensões de Cauchy pode ser escrito como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial \Psi_0(\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2, \bar{\varepsilon}_3)}{\partial \bar{\varepsilon}_{\alpha}} \frac{\partial \bar{\varepsilon}_{\alpha}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (3.6)$$

Para obter a derivada da deformação principal $\bar{\varepsilon}_{\alpha}(\boldsymbol{\varepsilon})$ em relação ao tensor de deformações, parte-se do diferencial total de (3.5). Para a dedução, conforme recomendado por Holzapfel (2002), considera-se inicialmente que as deformações principais são distintas:

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{\alpha=1}^3 \left[d\bar{\varepsilon}_{\alpha} \mathbf{n}_{\alpha} \otimes \mathbf{n}_{\alpha} + \bar{\varepsilon}_{\alpha} (d\mathbf{n}_{\alpha} \otimes \mathbf{n}_{\alpha} + \mathbf{n}_{\alpha} \otimes d\mathbf{n}_{\alpha}) \right] \quad (3.7)$$

As direções principais ($\mathbf{n}_{\alpha}$) formam uma base ortonormal, e a mudança de um vetor de comprimento constante é sempre ortogonal ao vetor original ($\mathbf{n}_{\alpha} \cdot d\mathbf{n}_{\alpha} = 0$). Assim, se a equação (3.7) for pré e pós multiplicada por $\mathbf{n}_{\alpha}$, tem-se:

$$\mathbf{n}_{\alpha} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{n}_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^3 \left[d\bar{\varepsilon}_{\alpha} \mathbf{n}_{\alpha} \cdot (\mathbf{n}_{\alpha} \otimes \mathbf{n}_{\alpha}) \mathbf{n}_{\alpha} + \bar{\varepsilon}_{\alpha} \mathbf{n}_{\alpha} \cdot (d\mathbf{n}_{\alpha} \otimes \mathbf{n}_{\alpha} + \mathbf{n}_{\alpha} \otimes d\mathbf{n}_{\alpha}) \mathbf{n}_{\alpha} \right] \quad (3.8)$$

$$\mathbf{n}_{\alpha} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{n}_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^3 \left[d\bar{\varepsilon}_{\alpha} \mathbf{n}_{\alpha} \cdot \mathbf{n}_{\alpha} (\mathbf{n}_{\alpha} \cdot \mathbf{n}_{\alpha}) + \bar{\varepsilon}_{\alpha} \mathbf{n}_{\alpha} \cdot (d\mathbf{n}_{\alpha} (\mathbf{n}_{\alpha} \cdot \mathbf{n}_{\alpha}) + \mathbf{n}_{\alpha} (\mathbf{n}_{\alpha} \cdot d\mathbf{n}_{\alpha})) \right] \quad (3.9)$$

$$\mathbf{n}_{\alpha} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{n}_{\alpha} = d\bar{\varepsilon}_{\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (3.10)$$

O lado esquerdo da equação (3.10) pode ser manipulado para obter a equação (3.11).

$$(\mathbf{n}_{\alpha} \otimes \mathbf{n}_{\alpha}) : d\boldsymbol{\varepsilon} = d\bar{\varepsilon}_{\alpha} \rightarrow (\mathbf{n}_{\alpha} \otimes \mathbf{n}_{\alpha}) : \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \bar{\varepsilon}_{\alpha}} d\bar{\varepsilon}_{\alpha} = d\bar{\varepsilon}_{\alpha} \rightarrow (\mathbf{n}_{\alpha} \otimes \mathbf{n}_{\alpha}) : \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \bar{\varepsilon}_{\alpha}} = 1 \quad (3.11)$$

Substituindo-se a unidade do lado direito da igualdade apresentada em (3.11) pela contração de $\partial \boldsymbol{\varepsilon} / \partial \bar{\varepsilon}_\alpha : \partial \bar{\varepsilon}_\alpha / \partial \boldsymbol{\varepsilon}$, tem-se:

$$(\mathbf{n}_\alpha \otimes \mathbf{n}_\alpha) : \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \bar{\varepsilon}_\alpha} = \frac{\partial \bar{\varepsilon}_\alpha}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \bar{\varepsilon}_\alpha} \quad (3.12)$$

Assim, chega-se à relação (3.13) a partir de (3.12).

$$\frac{\partial \bar{\varepsilon}_\alpha}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{n}_\alpha \otimes \mathbf{n}_\alpha \quad (3.13)$$

Portanto, substituindo (3.13) em (3.6), o tensor de tensões de Cauchy é reescrito como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_{\alpha=1}^3 \bar{\sigma}_\alpha \mathbf{n}_\alpha \otimes \mathbf{n}_\alpha \quad (3.14)$$

Sendo, $\bar{\sigma}_\alpha$ a tensão principal na direção α :

$$\bar{\sigma}_\alpha = \frac{\partial \Psi_0(\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2, \bar{\varepsilon}_3)}{\partial \bar{\varepsilon}_\alpha} \quad (3.15)$$

Note que o tensor de tensões de Cauchy possui as mesmas direções principais que o tensor de deformações infinitesimais. Isso é uma consequência da propriedade de isotropia do material. Para mais sobre o assunto, recomenda-se os livros de Asaro e Lubarda (2006) e de Bonet e Wood (2008).

Neste trabalho serão analisados apenas problemas de estado plano, e nesses problemas a determinação das deformações principais, assumindo que $\bar{\varepsilon}_1 > \bar{\varepsilon}_2$, utiliza-se de (3.16) e (3.17) .

$$\bar{\varepsilon}_1 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \quad (3.16)$$

$$\bar{\varepsilon}_2 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \quad (3.17)$$

Onde, ε_x é a deformação normal na direção do eixo cartesiano x ; ε_y é a deformação normal na direção do eixo cartesiano y ; e γ_{xy} é a distorção angular no plano cartesiano x - y .

E as direções principais associadas a cada uma das deformações principais, $\mathbf{n}_1$ e $\mathbf{n}_2$, são:

$$\mathbf{n}_1 = [l_1 \quad m_1]^T \quad (3.18)$$

$$\mathbf{n}_2 = [l_2 \quad m_2]^T \quad (3.19)$$

Onde, $l_i, m_i, i = 1, 2$ são os cossenos diretores de cada uma das direções principais $\mathbf{n}_i$. Estes podem ser calculados a partir do ângulo θ que relaciona a direção principal $\mathbf{n}_1$ com o vetor da base $\mathbf{e}_1$ do sistema cartesiano de referência do elemento¹. Assim, tem-se que $l_1 = \cos(\theta)$, $m_1 = \sin(\theta)$, $l_2 = -\sin(\theta)$ e $m_2 = \cos(\theta)$.

Vale destacar ainda que caso os valores das deformações principais sejam iguais, não se tem um par único de direções principais, assim, adota-se que as direções principais $\mathbf{n}_1$ e $\mathbf{n}_2$ estão orientadas nas direções cartesianas ($\theta = 0$) (CHI *et al.*, 2019).

3.2.1. Modelo constitutivo bilinear

Neste trabalho utiliza-se o modelo bilinear apresentado por Du *et al.* (2016), por ele favorecer a aplicação do método de Newton-Raphson para a solução do sistema de equações de equilíbrio. Além disso, este modelo constitutivo já foi utilizado em problemas de otimização topológica no trabalho de Du *et al.* (2019), o qual foi utilizado para validar a implementação computacional. Mais detalhes sobre essa escolha serão fornecidos no item 3.3.

Uma vez que neste trabalho serão trabalhados apenas problemas bidimensionais, a formulação será apresentada para essa classe de problemas. Para conferir a formulação para problemas tridimensionais, pode-se consultar o trabalho de Du *et al.* (2016).

Inicialmente, define-se os vetores $\boldsymbol{\sigma}_p$ e $\boldsymbol{\varepsilon}_p$ como os vetores com as componentes de tensão principal e de deformação principal, respectivamente:

$$\boldsymbol{\sigma}_p = [\bar{\sigma}_1 \quad \bar{\sigma}_2]^T \quad (3.20)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_p = [\bar{\varepsilon}_1 \quad \bar{\varepsilon}_2]^T \quad (3.21)$$

¹ Caso seja utilizado o MATLAB, recomenda-se o uso da função nativa `atan2` para o cálculo correto de θ . Esta função considera os quatro quadrantes para o cálculo do arco tangente. Assim, $\theta = \text{atan2}(\gamma_{12}, \varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})$.

A relação constitutiva pode ser expressa no espaço das tensões principais conforme (3.22).

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_1 \\ \bar{\sigma}_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{1 - \nu_1 \nu_2} \begin{bmatrix} E_1 & \nu_1 E_1 \\ \nu_2 E_2 & E_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\varepsilon}_1 \\ \bar{\varepsilon}_2 \end{Bmatrix} \quad (3.22)$$

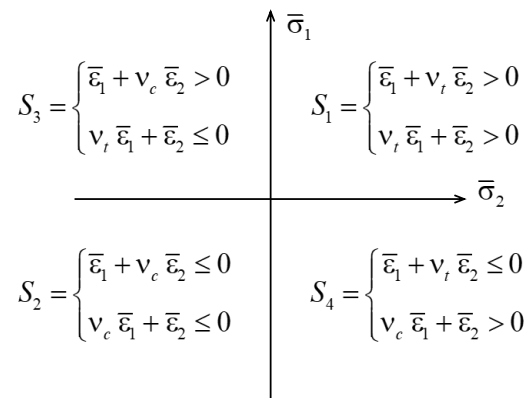
Onde E_1, E_2, ν_1, ν_2 são os valores de módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson associados às direções principais 1 e 2, respectivamente.

A definição dessas propriedades depende do sinal da tensão naquela direção. Portanto, reescrevendo a relação constitutiva na forma de componentes:

$$\bar{\sigma}_\alpha = \frac{E_\alpha}{1 - \nu_1 \nu_2} (\bar{\varepsilon}_\alpha + \nu_\alpha \bar{\varepsilon}_\beta), \quad \alpha \neq \beta; \alpha, \beta = 1, 2 \quad (3.23)$$

A relação escrita na forma (3.23), facilita a identificação de que o sinal da tensão principal α será determinado de acordo com o sinal do termo entre parênteses do lado direito da igualdade (3.23), haja vista que os parâmetros do material são valores positivos e o coeficiente de Poisson varia entre 0 e 0,5. Logo, pode-se definir as 4 sub-regiões do espaço das tensões principais, S_i , de acordo com a Figura 3.2., na qual ν_c representa o coeficiente de Poisson em compressão e ν_t o coeficiente de Poisson em tração.

Figura 3.2 - Definição das sub-regiões do espaço das tensões principais



A definição das sub-regiões no espaço das deformações principais é feita com base no espaço das tensões principais:

$$\mathcal{E}_i = \left\{ \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_1 & \bar{\varepsilon}_2 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_1 & \bar{\varepsilon}_2 \end{bmatrix}^T \in S_i \right\} \quad (3.24)$$

Uma vez definido (3.24), é possível definir o tensor constitutivo no sistema principal, $\mathbf{D}_i^p$, conforme (3.25).

$$\mathbf{D}_i^p = \begin{cases} \mathbf{D}_1^p = \frac{E_t}{1-(\nu_t)^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu_t \\ \nu_t & 1 \end{bmatrix}, \text{ se } \boldsymbol{\varepsilon}_p \in \mathcal{E}_1 \\ \mathbf{D}_2^p = \frac{E_c}{1-(\nu_c)^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu_t \\ \nu_t & 1 \end{bmatrix}, \text{ se } \boldsymbol{\varepsilon}_p \in \mathcal{E}_2 \\ \mathbf{D}_3^p = \frac{1}{1-\nu_t \nu_c} \begin{bmatrix} E_t & E_t \nu_c \\ E_t \nu_c & E_c \end{bmatrix}, \text{ se } \boldsymbol{\varepsilon}_p \in \mathcal{E}_3 \\ \mathbf{D}_4^p = \frac{1}{1-\nu_t \nu_c} \begin{bmatrix} E_c & E_c \nu_t \\ E_c \nu_t & E_t \end{bmatrix}, \text{ se } \boldsymbol{\varepsilon}_p \in \mathcal{E}_4 \end{cases} \quad (3.25)$$

Onde, E_c e E_t são os módulos de elasticidade à compressão e à tração, respectivamente.

Conforme destacado por Du *et al.* (2016), para garantir a simetria da matriz constitutiva é preciso que a relação $E_t \nu_c = E_c \nu_t$ seja respeitada.

Para obter a relação constitutiva no sistema global de coordenadas, entre $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x \ \sigma_y \ \tau_{xy}]^T$ e $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \gamma_{xy}]^T$, faz-se necessário o uso da matriz de transformação $\mathbf{Q}$, apresentada em (3.26).

Para mais detalhes sobre a matriz $\mathbf{Q}$, sugere-se consultar o livro de Cook *et al.* (2002).

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} l_1^2 & l_2^2 \\ m_1^2 & m_2^2 \\ l_1 m_1 & l_2 m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\cos \theta)^2 & (\sin \theta)^2 \\ (\sin \theta)^2 & (\cos \theta)^2 \\ \sin \theta \cos \theta & -\sin \theta \cos \theta \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

A matriz de transformação $\mathbf{Q}$ permite relacionar os vetores de deformação no sistema principal e no sistema de coordenadas global com:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_p = \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.27)$$

E fornece, também, uma relação entre os vetores de tensão no sistema de coordenadas global e no sistema principal com:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{Q} \boldsymbol{\sigma}_p \quad (3.28)$$

Com as relações (3.27) e (3.28), obtém-se a relação entre os tensores constitutivos no sistema global e no sistema principal:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{Q} \boldsymbol{\sigma}_p = \mathbf{Q} \mathbf{D}_i^p \boldsymbol{\varepsilon}_p = \mathbf{Q} \mathbf{D}_i^p \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\varepsilon} \rightarrow \mathbf{D}_i = \mathbf{Q} \mathbf{D}_i^p \mathbf{Q}^T, \text{ se } \boldsymbol{\varepsilon}_p \in \mathcal{E}_i, \text{ para } i = 1, \dots, 4 \quad (3.29)$$

É importante observar que a matriz constitutiva $\mathbf{D}_i$ em (3.29) fornece uma relação constitutiva secante, pelo fato de relacionar os valores totais atuais de tensão e de deformação. O uso desse tipo de relação constitutiva em métodos iterativos para solução do sistema de equações não-lineares, como o método de Newton-Raphson, promove uma dificuldade de convergência (DU *et al.*, 2016). Faz-se necessário, então, a obtenção de uma relação constitutiva tangente.

Para um estado de tensão de tração ou compressão pura, que corresponde às regiões S_1 e S_2 , na Figura 3.2, devido a propriedade de isotropia do material, a relação constitutiva tangente é dada simplesmente por:

$$\mathbf{D}_i^{tan} = \begin{cases} \frac{E_t}{1-(v_t)^2} \begin{bmatrix} 1 & v_t & 0 \\ v_t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-v_t}{2} \end{bmatrix}, & \text{se } \boldsymbol{\varepsilon}_p \in \mathcal{E}_1 \\ \frac{E_c}{1-(v_c)^2} \begin{bmatrix} 1 & v_c & 0 \\ v_c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-v_c}{2} \end{bmatrix}, & \text{se } \boldsymbol{\varepsilon}_p \in \mathcal{E}_2 \end{cases} \quad (3.30)$$

Contudo, para estados de tensão mais complexos, regiões S_3 e S_4 , na Figura 3.2, a relação constitutiva tangente é obtida a partir de:

$$\mathbf{D}_i^{tan} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial (\mathbf{D}_i \boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{D}_i + \left(\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{D}_i^p \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \mathbf{D}_i^p \frac{\partial \mathbf{Q}^T}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) \boldsymbol{\varepsilon}, \text{ se } \boldsymbol{\varepsilon}_p \in S_i, \text{ para } i = 3, 4 \quad (3.31)$$

Para obter as componentes do tensor constitutivo tangente, reescreve-se a equação (3.31) em notação indicial, de forma que os índices externos aos colchetes e chaves se referem às componentes dos tensores. Assim, tem-se:

$$[\mathbf{D}_i^{tan}]_{kl} = [\mathbf{D}_i]_{kl} + \left(\frac{\partial [\mathbf{Q}]_{km}}{\partial \{\boldsymbol{\varepsilon}\}_l} [\mathbf{D}_i^p]_{mn} [\mathbf{Q}]_{rn} + [\mathbf{Q}]_{km} [\mathbf{D}_i^p]_{mn} \frac{\partial [\mathbf{Q}]_{rn}}{\partial \{\boldsymbol{\varepsilon}\}_l} \right) \{\boldsymbol{\varepsilon}\}_r, \quad (3.32)$$

se $\boldsymbol{\varepsilon}_p \in \mathcal{E}_i$, para $i = 3, 4$

Sendo:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \{\boldsymbol{\varepsilon}\}_l} = \mathbf{Q}_{,l} = \begin{bmatrix} 2l_1 \frac{\partial l_1}{\partial \{\boldsymbol{\varepsilon}\}_l} & 2m_1 \frac{\partial m_1}{\partial \{\boldsymbol{\varepsilon}\}_l} & \frac{\partial l_1}{\partial \{\boldsymbol{\varepsilon}\}_l} m_1 + l_1 \frac{\partial m_1}{\partial \{\boldsymbol{\varepsilon}\}_l} \\ 2l_2 \frac{\partial l_2}{\partial \{\boldsymbol{\varepsilon}\}_l} & 2m_2 \frac{\partial m_2}{\partial \{\boldsymbol{\varepsilon}\}_l} & \frac{\partial l_2}{\partial \{\boldsymbol{\varepsilon}\}_l} m_2 + l_2 \frac{\partial m_2}{\partial \{\boldsymbol{\varepsilon}\}_l} \end{bmatrix}^T, l=1,2,3 \quad (3.33)$$

As componentes da matriz constitutiva tangente, se $\boldsymbol{\varepsilon}_p \in \mathcal{E}_i$ para $i = 3$ e 4 , são:

$$[\mathbf{D}_i^{tan}]_{11} = [\mathbf{D}_i]_{11} + \begin{bmatrix} 2l_1 \frac{\partial l_1}{\partial \varepsilon_x} & 2l_2 \frac{\partial l_2}{\partial \varepsilon_x} \end{bmatrix} \mathbf{D}_i^p \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\varepsilon} + \begin{bmatrix} l_1^2 & l_2^2 \end{bmatrix} \mathbf{D}_i^p \mathbf{Q}_{,1} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.34)$$

$$[\mathbf{D}_i^{tan}]_{12} = [\mathbf{D}_i^{tan}]_{21} = [\mathbf{D}_i]_{12} + \begin{bmatrix} 2l_1 \frac{\partial l_1}{\partial \varepsilon_y} & 2l_2 \frac{\partial l_2}{\partial \varepsilon_y} \end{bmatrix} \mathbf{D}_i^p \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\varepsilon} + \begin{bmatrix} l_1^2 & l_2^2 \end{bmatrix} \mathbf{D}_i^p \mathbf{Q}_{,2} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.35)$$

$$[\mathbf{D}_i^{tan}]_{13} = [\mathbf{D}_i^{tan}]_{31} = [\mathbf{D}_i]_{13} + \begin{bmatrix} 2l_1 \frac{\partial l_1}{\partial \gamma_{xy}} & 2l_2 \frac{\partial l_2}{\partial \gamma_{xy}} \end{bmatrix} \mathbf{D}_i^p \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\varepsilon} + \begin{bmatrix} l_1^2 & l_2^2 \end{bmatrix} \mathbf{D}_i^p \mathbf{Q}_{,3} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.36)$$

$$[\mathbf{D}_i^{tan}]_{22} = [\mathbf{D}_i]_{22} + \begin{bmatrix} 2m_1 \frac{\partial m_1}{\partial \varepsilon_y} & 2m_2 \frac{\partial m_2}{\partial \varepsilon_y} \end{bmatrix} \mathbf{D}_i^p \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\varepsilon} + \begin{bmatrix} m_1^2 & m_2^2 \end{bmatrix} \mathbf{D}_i^p \mathbf{Q}_{,2} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.37)$$

$$[\mathbf{D}_i^{tan}]_{23} = [\mathbf{D}_i^{tan}]_{32} = [\mathbf{D}_i]_{23} + \begin{bmatrix} 2m_1 \frac{\partial m_1}{\partial \gamma_{xy}} & 2m_2 \frac{\partial m_2}{\partial \gamma_{xy}} \end{bmatrix} \mathbf{D}_i^p \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\varepsilon} + \begin{bmatrix} m_1^2 & m_2^2 \end{bmatrix} \mathbf{D}_i^p \mathbf{Q}_{,3} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.38)$$

$$[\mathbf{D}_i^{tan}]_{33} = [\mathbf{D}_i]_{33} + \begin{bmatrix} \frac{\partial l_1}{\partial \gamma_{xy}} m_1 + l_1 \frac{\partial m_1}{\partial \gamma_{xy}} & \frac{\partial l_2}{\partial \gamma_{xy}} m_2 + l_2 \frac{\partial m_2}{\partial \gamma_{xy}} \end{bmatrix} \mathbf{D}_i^p \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\varepsilon} + \begin{bmatrix} l_1 m_1 & l_2 m_2 \end{bmatrix} \mathbf{D}_i^p \mathbf{Q}_{,3} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.39)$$

Para calcular as derivadas das componentes das direções principais $\mathbf{n}_1$ e $\mathbf{n}_2$ em relação às componentes do vetor de deformação, $\boldsymbol{\varepsilon}$, faz-se uso da formulação apresentada por Fox e Kapoor (1968). Primeiro, escreve-se o problema de autovalor e autovetor, e considera-se que os autovalores (deformações principais) são diferentes:

$$(\boldsymbol{\varepsilon}_t - \bar{\varepsilon}_\alpha \mathbf{I}) \mathbf{n}_\alpha = \mathbf{0} \quad (3.40)$$

Com:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0,5\gamma_{xy} \\ 0,5\gamma_{xy} & \varepsilon_y \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Para simplificar as manipulações algébricas, define-se a matriz $\mathbf{A}_\alpha = \boldsymbol{\varepsilon}_t - \bar{\varepsilon}_\alpha \mathbf{I}$, pré-multiplica a equação (3.40) por $\mathbf{n}_\alpha^T$, e deriva-se em relação a ε_l :

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_l} (\mathbf{n}_\alpha^T \mathbf{A}_\alpha \mathbf{n}_\alpha) = 0 \rightarrow \frac{\partial \mathbf{n}_\alpha}{\partial \varepsilon_l} \mathbf{A}_\alpha \mathbf{n}_\alpha + \mathbf{n}_\alpha^T \frac{\partial \mathbf{A}_\alpha}{\partial \varepsilon_l} \mathbf{n}_\alpha + \mathbf{n}_\alpha^T \mathbf{A}_\alpha \frac{\partial \mathbf{n}_\alpha}{\partial \varepsilon_l} = 0 \quad (3.42)$$

Substituindo (3.40) em (3.42), chega-se a:

$$\mathbf{n}_\alpha^T \frac{\partial \mathbf{A}_\alpha}{\partial \varepsilon_l} \mathbf{n}_\alpha = 0 \quad (3.43)$$

A relação (3.43) permite que seja obtida uma expressão para o cálculo da derivada do autovalor, $\bar{\varepsilon}_\alpha$, em relação a ε_l :

$$\mathbf{n}_\alpha^T \frac{\partial (\boldsymbol{\varepsilon}_t - \bar{\varepsilon}_\alpha \mathbf{I})}{\partial \varepsilon_l} \mathbf{n}_\alpha = 0 \rightarrow \frac{\partial \bar{\varepsilon}_\alpha}{\partial \varepsilon_l} = \mathbf{n}_\alpha^T \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_t}{\partial \varepsilon_l} \mathbf{n}_\alpha \quad (3.44)$$

A relação (3.44) será utilizada para o cálculo da derivada dos autovetores $\mathbf{n}_\alpha$ em relação a ε_l .

Para obter essa expressão, deriva-se (3.40) em relação a ε_l :

$$\frac{\partial \mathbf{A}_\alpha}{\partial \varepsilon_l} \mathbf{n}_\alpha + \mathbf{A}_\alpha \frac{\partial \mathbf{n}_\alpha}{\partial \varepsilon_l} = 0 \quad (3.45)$$

Como o tensor $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ é simétrico, os autovetores $\mathbf{n}_\alpha$ são ortogonais entre si. Logo, é possível escrever um vetor qualquer a partir de uma combinação linear das direções principais:

$$\frac{\partial \mathbf{n}_\alpha}{\partial \varepsilon_l} = \sum_{k=1}^2 c_k \mathbf{n}_k \quad (3.46)$$

Substituindo (3.46) em (3.45) e pré-multiplicando por $\mathbf{n}_\beta^T$:

$$\sum_{k=1}^2 c_k \mathbf{n}_\beta^T \mathbf{A}_\alpha \mathbf{n}_k = -\mathbf{n}_\beta^T \frac{\partial \mathbf{A}_\alpha}{\partial \varepsilon_l} \mathbf{n}_\alpha \quad (3.47)$$

$$\sum_{k=1}^2 c_k \mathbf{n}_\beta^T (\boldsymbol{\varepsilon}_t - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_\alpha \mathbf{I}) \mathbf{n}_k = -\mathbf{n}_\beta^T \frac{\partial \mathbf{A}_\alpha}{\partial \varepsilon_l} \mathbf{n}_\alpha \quad (3.48)$$

Como o tensor $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ é simétrico, tem-se que:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t \mathbf{n}_\alpha = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_\alpha \mathbf{n}_\alpha \rightarrow (\boldsymbol{\varepsilon}_t \mathbf{n}_\alpha)^T = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_\alpha \mathbf{n}_\alpha^T \rightarrow \mathbf{n}_\alpha^T \boldsymbol{\varepsilon}_t = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_\alpha \mathbf{n}_\alpha^T \quad (3.49)$$

Logo:

$$\sum_{k=1}^2 c_k (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_\beta - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_\alpha) \mathbf{n}_\beta^T \mathbf{n}_k = -\mathbf{n}_\beta^T \frac{\partial \mathbf{A}_\alpha}{\partial \varepsilon_l} \mathbf{n}_\alpha \rightarrow \sum_{k=1}^2 c_k (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_\beta - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_\alpha) \delta_{\beta k} = -\mathbf{n}_\beta^T \frac{\partial \mathbf{A}_\alpha}{\partial \varepsilon_l} \mathbf{n}_\alpha \quad (3.50)$$

Onde $\delta_{\beta k}$ é o delta de Kronecker.

Por fim, chega-se à expressão:

$$c_\beta = \frac{-\mathbf{n}_\beta^T \frac{\partial \mathbf{A}_\alpha}{\partial \varepsilon_l} \mathbf{n}_\alpha}{(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_\beta - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_\alpha)}, \quad \beta \neq \alpha \quad (3.51)$$

Com (3.51) obtém-se um dos coeficientes da combinação linear (3.46). O outro coeficiente é obtido a partir de:

$$\mathbf{n}_\alpha^T \mathbf{n}_\alpha = 1 \rightarrow \frac{\partial \mathbf{n}_\alpha^T}{\partial \varepsilon_l} \mathbf{n}_\alpha + \mathbf{n}_\alpha^T \frac{\partial \mathbf{n}_\alpha}{\partial \varepsilon_l} = 0 \rightarrow 2 \mathbf{n}_\alpha^T \frac{\partial \mathbf{n}_\alpha}{\partial \varepsilon_l} = 0 \quad (3.52)$$

Substituindo (3.46) em (3.52), tem-se:

$$2 \sum_{k=1}^2 c_k \mathbf{n}_\alpha^T \mathbf{n}_k = 0 \rightarrow 2 \sum_{k=1}^2 c_k \delta_{\alpha k} = 0 \rightarrow c_\alpha = 0 \quad (3.53)$$

Com (3.53), conclui-se que a derivada da direção principal $\mathbf{n}_\alpha$ é um vetor ortogonal a ela.

Por fim, resta definir o cálculo da derivada de $\mathbf{A}_\alpha$ em relação ε_l :

$$\frac{\partial \mathbf{A}_\alpha}{\partial \varepsilon_l} = \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_t}{\partial \varepsilon_l} - \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_\alpha}{\partial \varepsilon_l} \mathbf{I} = \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_t}{\partial \varepsilon_l} - \left(\mathbf{n}_\alpha^T \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_t}{\partial \varepsilon_l} \mathbf{n}_\alpha \right) \mathbf{I} \quad (3.54)$$

Substituindo (3.54) em (3.51), tem-se:

$$c_\beta = -\frac{\mathbf{n}_\beta^T \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_t}{\partial \varepsilon_l} \mathbf{n}_\alpha}{(\bar{\varepsilon}_\beta - \bar{\varepsilon}_\alpha)} + \frac{\left(\mathbf{n}_\alpha^T \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_t}{\partial \varepsilon_l} \mathbf{n}_\alpha \right) \mathbf{n}_\beta^T \mathbf{I} \mathbf{n}_\alpha}{(\bar{\varepsilon}_\beta - \bar{\varepsilon}_\alpha)}, \quad \beta \neq \alpha \quad (3.55)$$

Como as direções principais são ortogonais entre si, $\mathbf{n}_\beta^T \mathbf{n}_\alpha = 0$. Portanto:

$$\frac{\partial \mathbf{n}_\alpha}{\partial \varepsilon_l} = -\frac{\mathbf{n}_\beta^T \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_t}{\partial \varepsilon_l} \mathbf{n}_\alpha}{(\bar{\varepsilon}_\beta - \bar{\varepsilon}_\alpha)} \mathbf{n}_\beta, \quad \beta \neq \alpha; \quad \alpha, \beta = 1, 2 \quad (3.56)$$

Com (3.56), é possível definir os termos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial l_1}{\partial \varepsilon_i} = -\frac{1}{(\bar{\varepsilon}_2 - \bar{\varepsilon}_1)} \left(\mathbf{n}_2^T \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_t}{\partial \varepsilon_i} \mathbf{n}_1 \right) l_2 \\ \frac{\partial m_1}{\partial \varepsilon_i} = -\frac{1}{(\bar{\varepsilon}_2 - \bar{\varepsilon}_1)} \left(\mathbf{n}_2^T \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_t}{\partial \varepsilon_i} \mathbf{n}_1 \right) m_2 \\ \frac{\partial l_2}{\partial \varepsilon_i} = -\frac{1}{(\bar{\varepsilon}_1 - \bar{\varepsilon}_2)} \left(\mathbf{n}_1^T \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_t}{\partial \varepsilon_i} \mathbf{n}_2 \right) l_1 \\ \frac{\partial m_2}{\partial \varepsilon_i} = -\frac{1}{(\bar{\varepsilon}_1 - \bar{\varepsilon}_2)} \left(\mathbf{n}_1^T \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_t}{\partial \varepsilon_i} \mathbf{n}_2 \right) m_1 \end{array} \right., \quad \text{para } i = 1, 2, 3 \quad (3.57)$$

Onde:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_t}{\partial \varepsilon_1} = \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_t}{\partial \varepsilon_x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_t}{\partial \varepsilon_2} = \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_t}{\partial \varepsilon_y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_t}{\partial \varepsilon_3} = \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_t}{\partial \gamma_{xy}} = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 \\ 0,5 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

Por fim, define-se a energia de deformação específica por:

$$\Psi_0 = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.61)$$

3.2.2. Modelo constitutivo hiperelástico

Neste trabalho utiliza-se o modelo hiperelástico de Ogden-Storakers, também conhecido como modelo de Ogden compressível (HACKETT, 2018). Trata-se do mesmo modelo utilizado no trabalho de Chi *et al.* (2019). A função de energia interna de deformação específica é apresentada em (3.62).

$$\Psi_0(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{j=1}^M \frac{\mu_j}{\alpha_j} (\lambda_1^{\alpha_j} + \lambda_2^{\alpha_j} + \lambda_3^{\alpha_j} - 3) + \sum_{j=1}^M \frac{\mu_j}{\alpha_j \beta_j} [J^{-\alpha_j \beta_j} - 1] \quad (3.62)$$

Onde μ_j , α_j , β_j e M são parâmetros do material; $\lambda_i = \bar{\varepsilon}_i + 1$, $i = 1, \dots, 3$ são os alongamentos principais; e J é o jacobiano do processo de deformação:

$$J = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \quad (3.63)$$

O tensor constitutivo tangente é obtido a partir da relação incremental dos tensores (3.5) e (3.14), sendo apresentado em (3.64) sua forma espectral. O Apêndice B apresenta de forma detalhada a dedução do tensor constitutivo tangente em sua forma espectral.

$$\mathcal{C}_{OG} = \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \frac{\partial \bar{\sigma}_\alpha}{\partial \bar{\varepsilon}_\beta} \mathbf{n}_\alpha \otimes \mathbf{n}_\alpha \otimes \mathbf{n}_\beta \otimes \mathbf{n}_\beta + \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^3 \frac{1}{2} \frac{(\bar{\sigma}_\beta - \bar{\sigma}_\alpha)}{(\bar{\varepsilon}_\beta - \bar{\varepsilon}_\alpha)} \mathbf{n}_\alpha \otimes \mathbf{n}_\beta \otimes (\mathbf{n}_\alpha \otimes \mathbf{n}_\beta + \mathbf{n}_\beta \otimes \mathbf{n}_\alpha) \quad (3.64)$$

As componentes cisalhantes do tensor constitutivo tangente podem ser indeterminadas caso o tensor de deformações infinitesimais possua autovalores (deformações principais) repetidos. Nesse caso, esses coeficientes são substituídos por seus respectivos limites (BONET; WOOD, 2008; CHI *et al.*, 2019), conforme (3.65).

$$\lim_{\bar{\varepsilon}_\beta \rightarrow \bar{\varepsilon}_\alpha} \frac{(\bar{\sigma}_\beta - \bar{\sigma}_\alpha)}{(\bar{\varepsilon}_\beta - \bar{\varepsilon}_\alpha)} = \lim_{\bar{\varepsilon}_\beta \rightarrow \bar{\varepsilon}_\alpha} \frac{\frac{\partial}{\partial \bar{\varepsilon}_\beta} (\bar{\sigma}_\beta - \bar{\sigma}_\alpha)}{\frac{\partial}{\partial \bar{\varepsilon}_\beta} (\bar{\varepsilon}_\beta - \bar{\varepsilon}_\alpha)} = \frac{\partial \bar{\sigma}_\beta}{\partial \bar{\varepsilon}_\beta} - \frac{\partial \bar{\sigma}_\alpha}{\partial \bar{\varepsilon}_\beta} \quad (3.65)$$

Para obtenção das componentes do tensor constitutivo tangente (3.64), é necessário definir as tensões principais. Conforme indicado em (3.15), elas podem ser obtidas diretamente através da derivada da função de energia interna de deformação específica em relação aos seus respectivos alongamentos principais. Logo, considerando o modelo de Ogden compressível, apresentado na equação (3.62), tem-se (3.66), a qual pode ser escrita de forma simplificada (3.67).

$$\bar{\sigma}_\alpha = \frac{\partial \Psi_0(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)}{\partial \lambda_\alpha} = \sum_{j=1}^M \frac{\mu_j}{\alpha_j} \alpha_j \lambda_\alpha^{\alpha_j-1} + \sum_{j=1}^M \frac{\mu_j}{\alpha_j \beta_j} \left[-\alpha_j \beta_j J^{-\alpha_j \beta_j - 1} \frac{J}{\lambda_\alpha} \right] \quad (3.66)$$

$$\bar{\sigma}_\alpha = \sum_{j=1}^M \mu_j \left(\lambda_\alpha^{\alpha_j-1} - J^{-\alpha_j \beta_j} \lambda_\alpha^{-1} \right) \quad (3.67)$$

O vetor de tensões no sistema de coordenadas globais é obtido aplicando-se a transformação apresentada em (3.28). Para obter as componentes normais do tensor constitutivo tangente, é calculada a derivada da tensão principal α em relação a deformação β , conforme apresentado em (3.68).

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_\alpha}{\partial \bar{\epsilon}_\beta} = \frac{\partial \bar{\sigma}_\alpha}{\partial \lambda_\beta} \frac{\partial \lambda_\beta}{\partial \bar{\epsilon}_\beta} = \sum_{j=1}^M \mu_j \left[(\alpha_j - 1) \delta_{\alpha\beta} \lambda_\alpha^{\alpha_j-2} + \delta_{\alpha\beta} \lambda_\alpha^{-2} J^{-\alpha_j \beta_j} + \alpha_j \beta_j J^{-\alpha_j \beta_j} \lambda_\alpha^{-1} \lambda_\beta^{-1} \right] \quad (3.68)$$

Sendo $\delta_{\alpha\beta}$ o delta de Kronecker.

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_\alpha}{\partial \bar{\epsilon}_\beta} = \begin{cases} \sum_{j=1}^M \mu_j \left[(\alpha_j - 1) \lambda_\alpha^{\alpha_j-2} + \lambda_\alpha^{-2} (1 + \alpha_j \beta_j) J^{-\alpha_j \beta_j} \right] & , \alpha = \beta \\ \sum_{j=1}^M \mu_j \alpha_j \beta_j J^{-\alpha_j \beta_j} \lambda_\alpha^{-1} \lambda_\beta^{-1} & , \alpha \neq \beta \end{cases} \quad (3.69)$$

Por fim, os parâmetros do modelo constitutivo (3.62) devem respeitar as condições de que, para o estado indeformado ($\bar{\lambda}_\alpha=1$), a energia interna de deformação específica (3.62) e as tensões devem ser nulas (3.67). Conforme apresentado em (3.70) e (3.71), essas condições são atendidas por definição:

$$\Psi_0(1,1,1) = \sum_{j=1}^M \frac{\mu_j}{\alpha_j} (3-3) + \sum_{j=1}^M \frac{\mu_j}{\alpha_j \beta_j} [1-1] = 0 \quad (3.70)$$

$$\bar{\sigma}_\alpha(1,1,1) = \sum_{j=1}^M \mu_j (1-1) = 0 \quad (3.71)$$

Deve-se, também, impor que o tensor constitutivo tangente (3.64) seja igual ao tensor constitutivo elástico no estado indeformado (3.72).

$$\mathbf{C}_{EL} = \begin{bmatrix} \Lambda + 2\mu & \Lambda & \Lambda & 0 & 0 & 0 \\ \Lambda & \Lambda + 2\mu & \Lambda & 0 & 0 & 0 \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

Onde Λ e μ , são os parâmetros de Lamé, os quais podem ser escritos em função do módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson de acordo com (3.73) e (3.74).

$$\Lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (3.73)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.74)$$

A comparação dos termos dos tensores constitutivos fornece as relações (3.75) e (3.76).

$$\Lambda = \frac{\partial \bar{\sigma}_\alpha}{\partial \bar{\epsilon}_\beta}, \text{ sendo } \alpha \neq \beta \rightarrow \Lambda = \sum_{j=1}^M \mu_j \alpha_j \beta_j \quad (3.75)$$

$$\Lambda + 2\mu = \frac{\partial \bar{\sigma}_\alpha}{\partial \bar{\epsilon}_\beta}, \text{ sendo } \alpha = \beta \rightarrow \mu = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^M \mu_j \alpha_j \quad (3.76)$$

3.2.2.1. Hipótese de estado plano de deformação

Em problemas de estado plano de deformação, a deformação principal fora do plano é nula e sua tensão normal correspondente é desacoplada do problema. As tensões principais no plano são obtidas a partir de (3.67) com $\bar{\sigma}_\alpha(\bar{\epsilon}_1, \bar{\epsilon}_2, 0)$, com $\alpha = 1$ e 2. A matriz constitutiva tangente é obtida conforme apresentado em (3.77).

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}^{tan} = & \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\sigma}_1(\bar{\epsilon}_1, \bar{\epsilon}_2, 0)}{\partial \bar{\epsilon}_1} & \frac{\partial \bar{\sigma}_1(\bar{\epsilon}_1, \bar{\epsilon}_2, 0)}{\partial \bar{\epsilon}_2} \\ \frac{\partial \bar{\sigma}_2(\bar{\epsilon}_1, \bar{\epsilon}_2, 0)}{\partial \bar{\epsilon}_1} & \frac{\partial \bar{\sigma}_2(\bar{\epsilon}_1, \bar{\epsilon}_2, 0)}{\partial \bar{\epsilon}_2} \end{bmatrix} \mathbf{Q}^T \\
& + \frac{\bar{\sigma}_1(\bar{\epsilon}_1, \bar{\epsilon}_2, 0) - \bar{\sigma}_2(\bar{\epsilon}_1, \bar{\epsilon}_2, 0)}{4(\bar{\epsilon}_1 - \bar{\epsilon}_2)} \begin{bmatrix} 1 - \cos(4\theta) & \cos(4\theta) - 1 & -\sin(4\theta) \\ \cos(4\theta) - 1 & 1 - \cos(4\theta) & \sin(4\theta) \\ -\sin(4\theta) & \sin(4\theta) & \cos(4\theta) + 1 \end{bmatrix}
\end{aligned} \quad (3.77)$$

Sendo, $\mathbf{Q}$ a matriz de transformação definida em (3.26).

Caso as deformações principais 1 e 2 sejam iguais, conforme destacado por Chi *et al.* (2019), qualquer par de vetores ortonormais pode ser adotado como as direções principais. Por motivos de simplicidade, adotam-se as direções do sistema cartesiano como as direções principais, com $\mathbf{n}_1 = [1 \ 0]^T$ e $\mathbf{n}_2 = [0 \ 1]^T$, o que corresponde a $\theta = 0$. Para evitar que o termo não-nulo da matriz constitutiva associado à distorção angular a torne singular, substitui-se esse termo pelo seu limite, $\bar{\epsilon}_1 \rightarrow \bar{\epsilon}_2$, conforme apresentado anteriormente em (3.65). Nesse caso, a matriz constitutiva tangente é calculada conforme (3.78).

$$\mathbf{D}^{tan} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\sigma}_1(\bar{\epsilon}_1, \bar{\epsilon}_2, 0)}{\partial \bar{\epsilon}_1} & \frac{\partial \bar{\sigma}_1(\bar{\epsilon}_1, \bar{\epsilon}_2, 0)}{\partial \bar{\epsilon}_2} & 0 \\ \frac{\partial \bar{\sigma}_2(\bar{\epsilon}_1, \bar{\epsilon}_2, 0)}{\partial \bar{\epsilon}_1} & \frac{\partial \bar{\sigma}_2(\bar{\epsilon}_1, \bar{\epsilon}_2, 0)}{\partial \bar{\epsilon}_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{\sigma}_1(\bar{\epsilon}_1, \bar{\epsilon}_2, 0)}{\partial \bar{\epsilon}_1} - \frac{\partial \bar{\sigma}_1(\bar{\epsilon}_1, \bar{\epsilon}_2, 0)}{\partial \bar{\epsilon}_2} \right) \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

3.2.2.2. Hipótese de estado plano de tensão

Em problemas de estado plano de tensão, a tensão principal fora do plano é nula e a deformação principal associada não. Com $\bar{\sigma}_3$ nula, pode-se obter $\bar{\epsilon}_3$ a partir da solução da equação não-linear (3.79).

$$\sum_{j=1}^M \mu_j \left((\bar{\epsilon}_3 + 1)^{\alpha_j - 1} - J^{-\alpha_j \beta_j} (\bar{\epsilon}_3 + 1)^{-1} \right) = 0 \quad (3.79)$$

A equação não-linear (3.79) pode ser solucionada utilizando o método de Newton, e tal solução é referenciada como $\bar{\epsilon}_3^*(\bar{\epsilon}_1, \bar{\epsilon}_2)$. A partir desta, as tensões principais no plano são obtidas com (3.67) e $\bar{\sigma}_\alpha(\bar{\epsilon}_1, \bar{\epsilon}_2, \bar{\epsilon}_3^*)$, sendo $\alpha = 1$ e 2 . A matriz constitutiva tangente é calculada a partir de (3.80).

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^{tan} = & \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\sigma}_1(\bar{\epsilon}_1, \bar{\epsilon}_2, \bar{\epsilon}_3^*)}{\partial \bar{\epsilon}_1} & \frac{\partial \bar{\sigma}_1(\bar{\epsilon}_1, \bar{\epsilon}_2, \bar{\epsilon}_3^*)}{\partial \bar{\epsilon}_2} \\ \frac{\partial \bar{\sigma}_2(\bar{\epsilon}_1, \bar{\epsilon}_2, \bar{\epsilon}_3^*)}{\partial \bar{\epsilon}_1} & \frac{\partial \bar{\sigma}_2(\bar{\epsilon}_1, \bar{\epsilon}_2, \bar{\epsilon}_3^*)}{\partial \bar{\epsilon}_2} \end{bmatrix} \mathbf{Q}^T \\ & + \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\sigma}_1(\bar{\epsilon}_1, \bar{\epsilon}_2, \bar{\epsilon}_3^*)}{\partial \bar{\epsilon}_3} \frac{\partial \bar{\epsilon}_3^*}{\partial \bar{\epsilon}_1} & \frac{\partial \bar{\sigma}_1(\bar{\epsilon}_1, \bar{\epsilon}_2, \bar{\epsilon}_3^*)}{\partial \bar{\epsilon}_3} \frac{\partial \bar{\epsilon}_3^*}{\partial \bar{\epsilon}_2} \\ \frac{\partial \bar{\sigma}_2(\bar{\epsilon}_1, \bar{\epsilon}_2, \bar{\epsilon}_3^*)}{\partial \bar{\epsilon}_3} \frac{\partial \bar{\epsilon}_3^*}{\partial \bar{\epsilon}_1} & \frac{\partial \bar{\sigma}_2(\bar{\epsilon}_1, \bar{\epsilon}_2, \bar{\epsilon}_3^*)}{\partial \bar{\epsilon}_3} \frac{\partial \bar{\epsilon}_3^*}{\partial \bar{\epsilon}_2} \end{bmatrix} \mathbf{Q}^T \\ & + \frac{\bar{\sigma}_1(\bar{\epsilon}_1, \bar{\epsilon}_2, \bar{\epsilon}_3^*) - \bar{\sigma}_2(\bar{\epsilon}_1, \bar{\epsilon}_2, \bar{\epsilon}_3^*)}{4(\bar{\epsilon}_1 - \bar{\epsilon}_2)} \begin{bmatrix} 1 - \cos(4\theta) & \cos(4\theta) - 1 & -\sin(4\theta) \\ \cos(4\theta) - 1 & 1 - \cos(4\theta) & \sin(4\theta) \\ -\sin(4\theta) & \sin(4\theta) & \cos(4\theta) + 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.80)$$

Assim como foi feito para o estado plano de deformação, caso as deformações principais 1 e 2 sejam iguais, a matriz constitutiva tangente é dada por (3.81).

$$\mathbf{D}^{tan} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\sigma}_1}{\partial \bar{\epsilon}_1} & \frac{\partial \bar{\sigma}_1}{\partial \bar{\epsilon}_2} & 0 \\ \frac{\partial \bar{\sigma}_2}{\partial \bar{\epsilon}_1} & \frac{\partial \bar{\sigma}_2}{\partial \bar{\epsilon}_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{\sigma}_1}{\partial \bar{\epsilon}_1} - \frac{\partial \bar{\sigma}_1}{\partial \bar{\epsilon}_2} \right) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\sigma}_1}{\partial \bar{\epsilon}_3} \frac{\partial \bar{\epsilon}_3^*}{\partial \bar{\epsilon}_1} & \frac{\partial \bar{\sigma}_1}{\partial \bar{\epsilon}_3} \frac{\partial \bar{\epsilon}_3^*}{\partial \bar{\epsilon}_2} & 0 \\ \frac{\partial \bar{\sigma}_2}{\partial \bar{\epsilon}_3} \frac{\partial \bar{\epsilon}_3^*}{\partial \bar{\epsilon}_1} & \frac{\partial \bar{\sigma}_2}{\partial \bar{\epsilon}_3} \frac{\partial \bar{\epsilon}_3^*}{\partial \bar{\epsilon}_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{\sigma}_1}{\partial \bar{\epsilon}_3} \left(\frac{\partial \bar{\epsilon}_3^*}{\partial \bar{\epsilon}_1} - \frac{\partial \bar{\epsilon}_3^*}{\partial \bar{\epsilon}_2} \right) \end{bmatrix} \quad (3.81)$$

3.3. SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

Devido à não linearidade proveniente do modelo constitutivo, o sistema de equações de equilíbrio $\mathbf{F}_{int}(\mathbf{z}, \mathbf{U}) - \mathbf{F}_{ext} = \mathbf{0}$ é composto por equações não lineares. Assim, faz-se necessário o

uso de um processo iterativo para solução do sistema de equações. Primeiro, define-se o vetor de forças residuais como (3.82).

$$\mathbf{R}(\mathbf{z}, \mathbf{U}) = \mathbf{F}_{int}(\mathbf{z}, \mathbf{U}) - \mathbf{F}_{ext} \quad (3.82)$$

O equilíbrio deve ser satisfeito durante o processo iterativo do método de Newton-Raphson. Assim, o sistema apresentado em (3.82) é linearizado em relação ao vetor de deslocamentos e a imposição da condição de equilíbrio conduz a:

$$\mathbf{R}(\mathbf{z}, \mathbf{U}_{k+1}) = \mathbf{R}(\mathbf{z}, \mathbf{U}_k) + \frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{z}, \mathbf{U}_k)}{\partial \mathbf{U}} \Delta \mathbf{U}_k = \mathbf{0} \quad (3.83)$$

Substituindo (3.82) em (3.83), chega-se a:

$$\mathbf{F}_{int}(\mathbf{z}, \mathbf{U}_k) - \mathbf{F}_{ext} + \frac{\partial \mathbf{F}_{int}(\mathbf{z}, \mathbf{U}_k)}{\partial \mathbf{U}} \Delta \mathbf{U}_k = \mathbf{0} \quad (3.84)$$

$$\mathbf{K}_t(\mathbf{z}, \mathbf{U}_k) \Delta \mathbf{U}_k = -\mathbf{R}(\mathbf{z}, \mathbf{U}_k) \quad (3.85)$$

A equação (3.85) exprime a relação de equilíbrio tangente, na qual o incremento do vetor de deslocamentos é obtido a partir da solução do sistema de equações lineares, com base no vetor de forças residuais e na matriz de rigidez tangente do sistema, $\mathbf{K}_t$. Esta última é obtida a partir da derivada do vetor de forças internas, definido em (2.44), em relação ao vetor de deslocamentos:

$$\mathbf{K}_t(\mathbf{z}, \mathbf{U}) = \sum_{l=1}^N \int_{\Omega_l} m_E(y_l) \mathbf{B}_l(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_l(\mathbf{u}_l, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{u}_l} d\mathbf{x} \quad (3.86)$$

A derivada do vetor de tensões de Cauchy do elemento l em relação ao vetor de deslocamentos associado ao elemento, $\mathbf{u}_l$, é dada por:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_l(\mathbf{u}_l, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{u}_l} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_l(\mathbf{u}_l, \mathbf{x})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_l(\mathbf{u}_l, \mathbf{x})} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_l(\mathbf{u}_l, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{u}_l} = \mathbf{D}^{tan}(\mathbf{u}_l, \mathbf{x}) \mathbf{B}_l(\mathbf{x}) \quad (3.87)$$

A equação (3.87) exprime a matriz constitutiva tangente, $\mathbf{D}^{tan}$, como a derivada do vetor de tensões de Cauchy em relação ao vetor de deformações.

Por fim, a matriz de rigidez tangente pode ser escrita como na equação (3.88), com a matriz de rigidez tangente do elemento conforme a equação (3.89).

$$\mathbf{K}_t(\mathbf{z}, \mathbf{U}) = \sum_{l=1}^N m_E(y_l) \mathbf{k}_t^l(\mathbf{u}_l) \quad (3.88)$$

$$\mathbf{k}_t^l(\mathbf{u}_l) = \int_{\Omega_l} \mathbf{B}_l(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{D}^{tan}(\mathbf{u}_l, \mathbf{x}) \mathbf{B}_l(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (3.89)$$

Além disso, destaca-se que o somatório em (3.88) indica o processo de montagem da matriz de rigidez tangente do sistema a partir das matrizes elementares expressas em (3.89).

A fim de se evitar a necessidade de uma análise incremental e reduzir o tempo de processamento, Zhang, Paulino e Ramos Jr. (2017) recomendaram o uso de uma busca linear inexata apresentada por Ascher e Greif (2011). Inserindo a busca linear no processo iterativo do método de Newton-Raphson, a atualização do vetor de deslocamentos passa a ser realizada conforme (3.90).

$$\mathbf{U}_{k+1} = \mathbf{U}_k + \xi_k \Delta \mathbf{U}_k \quad (3.90)$$

Sendo ξ_k o valor da dimensão do passo, variando de 0 a 1, na direção de $\Delta \mathbf{U}_k$.

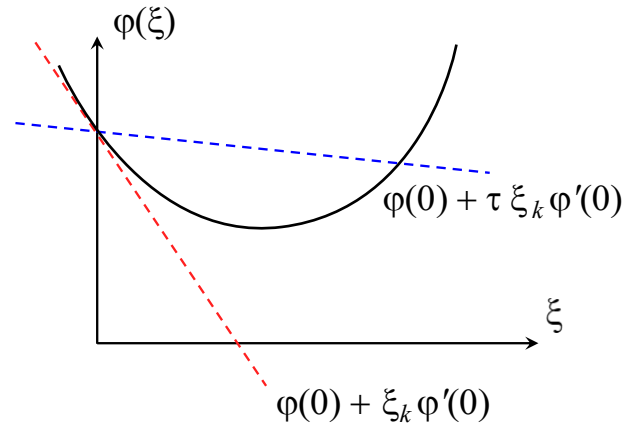
O valor de ξ_k é determinado de modo que se garanta um decréscimo no valor da função a ser minimizada (φ) (ASCHER; GREIF, 2011).

$$\varphi(\xi_k) = \varphi(\mathbf{U}_k + \xi_k \Delta \mathbf{U}_k) \quad (3.91)$$

Note que a busca linear é definida por uma função escalar. Além disso, ela é dita inexata pois não se obtém o valor exato do passo que minimiza a função, e sim garante que haja um decréscimo, de modo que respeite o critério apresentado em (3.92). A Figura 3.3 apresenta uma representação gráfica do critério utilizado para garantir o decréscimo da função φ .

$$\varphi(\xi_k) \leq \varphi(0) + \tau \xi_k \varphi'(0) \quad (3.92)$$

Figura 3.3 - Representação gráfica do critério da busca linear inexata



Note que a constante τ tem a função de relaxar o valor da taxa de decréscimo inicial da função utilizado no critério (3.92). Logo, de acordo com (3.92), na Figura 3.3 qualquer valor obtido abaixo da reta azul é um valor que atende ao critério. Geralmente, adota-se o valor de 10^{-4} (ASCHER; GREIF, 2011).

O valor do passo ξ é iniciado com um valor máximo prescrito, ξ_{max} , e então este é reduzido até que seja atingido o critério de decréscimo estabelecido. A atualização é feita conforme a proposta de Ascher e Greif (2011): como se conhece o valor da função em dois pontos, $\xi=0$ e $\xi=\tilde{\xi}_k$, e de sua inclinação no ponto $\xi=0$, é obtida uma aproximação por meio de um polinômio do 2º grau, conforme apresentado em (3.93)

$$\varphi(\xi) = \varphi(0) + \varphi'(0)\xi + \frac{(\varphi(\tilde{\xi}_k) - \varphi(0) - \varphi'(0)\tilde{\xi}_k)}{\tilde{\xi}_k^2} \xi^2 \quad (3.93)$$

A minimização do polinômio (3.93) em relação ao passo ξ fornece a atualização do passo ξ_k (3.94).

$$\xi_k = -\frac{\tilde{\xi}_k \varphi'(0)}{2(\varphi(\tilde{\xi}_k) - \varphi(0) - \tilde{\xi}_k \varphi'(0))} \tilde{\xi}_k = \kappa \tilde{\xi}_k \quad (3.94)$$

Caso o valor do parâmetro de atualização (κ) seja um valor muito pequeno, $\kappa < 0,1$, deve-se usar um valor de $\kappa = 0,5$.

Por fim, o Quadro 3.1 apresenta o algoritmo do método de Newton-Raphson com a busca linear inexata e o Quadro 3.2 apresenta o algoritmo da busca linear que é realizada no passo 07 indicado no algoritmo do Quadro 3.1.

Quadro 3.1 – Algoritmo do método de Newton-Raphson com busca linear inexata

01:	Inicializar: $\mathbf{U}_0 = \mathbf{0}$; tol ; $maxIter$;
02:	Para k de 0 a $maxIter$ faça
03:	Calcule: $\mathbf{F}_{int}(\mathbf{U}_k)$ e $\mathbf{K}_t(\mathbf{U}_k)$
04:	Calcule: $\mathbf{R}(\mathbf{U}_k) = \mathbf{F}_{int}(\mathbf{U}_k) - \mathbf{F}_{ext}$
05:	Solucione: $\mathbf{K}_t(\mathbf{U}_k) \Delta \mathbf{U}_k = -\mathbf{R}(\mathbf{U}_k)$
06:	Encontre: ξ_k (Respeitando: $0 < \xi_{min} \leq \xi_k \leq 1$)
07:	Atualize: $\mathbf{U}_{k+1} = \mathbf{U}_k + \xi_k \Delta \mathbf{U}_k$
08:	Se $\ \mathbf{R}(\mathbf{U}_k)\ /\ \mathbf{F}_{ext}\ < tol$ ou $\ \Delta \mathbf{U}_k\ /(\ \mathbf{U}_{k+1}\ + 1) < tol$ então
09:	<i>Break</i>
10:	Fim se
11:	Fim para

Fonte: Adaptado de Sanders, Ramos Jr. e Paulino (2020)

Quadro 3.2 - Algoritmo da busca linear inexata

01:	Entrada: $\mathbf{U}_k, \Delta \mathbf{U}_k$
02:	Inicializar: $j = 0$; $\tau = 1e-4$; $\xi_{min} = 1e-6$; $\xi_{max} = 1$; $\xi_k^0 = \xi_{max}$
03:	Calcule: $\mathbf{U}_{k+1} = \mathbf{U}_k + \xi_k^0 \Delta \mathbf{U}_k$
04:	Enquanto $\varphi(\xi_k) \leq \varphi(0) + \tau \xi_k \varphi'(0)$ faça
05:	Calcule: $\kappa = -0.5 \xi_k^j \varphi'(0) / (\varphi(\xi_k^j) - \varphi(0) - \xi_k^j \varphi'(0))$
06:	Se $\kappa < 0,1$
07:	$\kappa = 0,5$
08:	Fim se
09:	Atualize: $\xi_k^{j+1} = \kappa \xi_k^j$
10:	Atualize: $\mathbf{U}_{k+1} = \mathbf{U}_k + \xi_k \Delta \mathbf{U}_k$
11:	Atualize: $j = j + 1$
12:	Fim enquanto
13:	Retorne: $\xi_k = \xi_k^j$

Fonte: Adaptado de Sanders, Ramos Jr. e Paulino (2020)

O Quadro 3.2 apresenta o algoritmo da busca linear considerando uma função genérica φ . Nesta seção do trabalho, assim como em Chi *et al.* (2019), a função φ a ser minimizada é a energia potencial total. Assim, é possível definir:

$$\varphi(0) = \Pi(\mathbf{U}_k) \quad (3.95)$$

$$\varphi(\xi_k) = \Pi(\mathbf{U}_k + \xi_k \Delta \mathbf{U}_k) \quad (3.96)$$

$$\varphi'(0) = \Delta \mathbf{U}_k^T \nabla \Pi(\mathbf{U}_k) = \Delta \mathbf{U}_k^T \mathbf{R}(\mathbf{U}_k) \quad (3.97)$$

Outra alternativa, é definir a função φ como a norma do vetor de forças residuais, como foi feito no trabalho de Londoño e Paulino (2021a), nesse caso:

$$\varphi(0) = \|\mathbf{R}(\mathbf{U}_k)\| \quad (3.98)$$

$$\varphi(\xi_k) = \|\mathbf{R}(\mathbf{U}_k + \xi_k \Delta \mathbf{U}_k)\| \quad (3.99)$$

$$\varphi'(0) = \frac{\mathbf{R}(\mathbf{U}_k)}{\|\mathbf{R}(\mathbf{U}_k + \xi_k \Delta \mathbf{U}_k)\|} \cdot (\mathbf{K}_t \Delta \mathbf{U}_k) \quad (3.100)$$

3.4. SOBRE A IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

A implementação computacional deste trabalho foi feita utilizando como base o código educacional `PolyTop`, fornecido no artigo educacional de Talischi *et al.* (2012a). Devido à modularidade do código, as principais alterações consistiram na mudança da rotina de análise estrutural; no cálculo da função objetivo e de sua sensibilidade.

Para a solução do sistema de equações não-lineares utilizando o algoritmo de Newton-Raphson (Quadro 3.1), utiliza-se como vetor de deslocamentos inicial o vetor de deslocamentos da solução da iteração anterior do processo de otimização. Deste modo o resíduo inicial é menor, o que implica numa quantidade menor de iterações para obter a convergência.

Por fim, ressalta-se que, para aumentar a eficiência computacional, foi utilizado um arquivo MEX, que são códigos compilados em linguagem C++, podendo ser também C ou Fortran, a partir de uma função escrita em Matlab. Esse arquivo MEX foi utilizado para realizar a

compilação da matriz de rigidez, do vetor de forças internas e da energia interna de deformação em cada elemento finito. O uso do arquivo MEX foi feito a partir de uma adaptação da rotina fornecida no código educacional `PolyStress` (LONDOÑO; PAULINO, 2021a).

3.5. EXEMPLOS

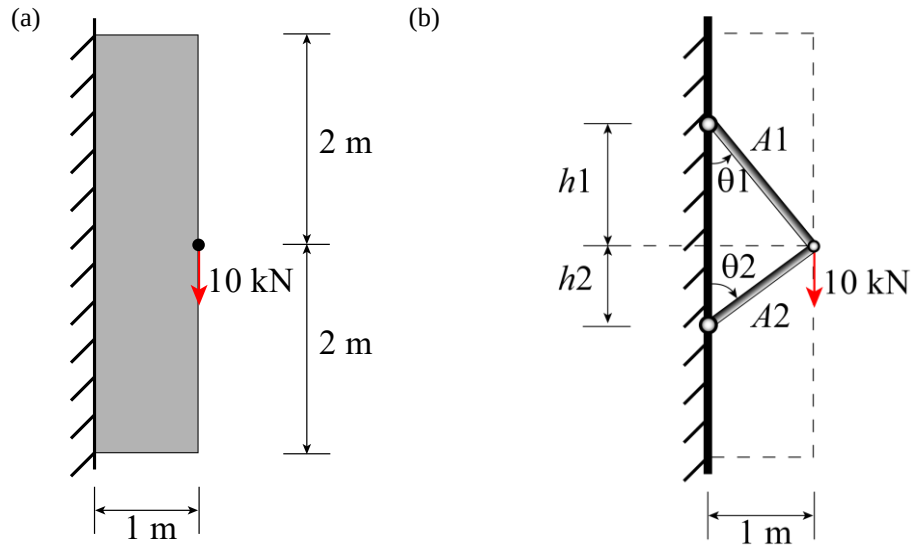
Este item apresenta dois exemplos que foram utilizados para validar a implementação computacional e outros dois exemplos para discutir o uso dos modelos constitutivos apresentados. Para todos os exemplos, foi utilizado o OC como esquema de atualização das variáveis de projeto, o qual está detalhado no Apêndice A deste trabalho. Ainda em relação à otimização, foi utilizado o filtro de densidade linear, com o intuito de introduzir uma dimensão mínima para os membros da topologia final. Nos exemplos em que foi utilizada uma malha de elementos quadrilaterais, o filtro tem adicionalmente a função de controlar as instabilidades numéricas, como a formação de tabuleiro de xadrez. O modelo SIMP foi adotado para penalização das densidades intermediárias.

Seguindo o que foi feito no trabalho de Chi *et al.* (2019), o filtro de densidade foi aplicado adotando um esquema de continuação no valor do raio do filtro para obter soluções mais próximas possíveis de preto e branco. A continuação no valor do raio é feita a partir de um número de iterações pré-estabelecidas, igual a 200 iterações, ou um nível de convergência do processo de otimização ($tol = 0,05$), sendo iniciado o processo com $R = R_0$. A partir desse ponto, o raio é atualizado a cada 10 iterações, reduzindo o raio $R = R - \Delta R$ com $\Delta R = R_0/4$ até um valor mínimo de $R = R_0/4$ ser atingido. Também foi realizada uma continuação no valor do coeficiente de penalização, p , do modelo SIMP. Inicia-se o processo de otimização com um valor de $p = 1$, e incrementa-se p em 0,1 a cada 2 iterações até atingir um valor de $p = 3$.

3.5.1. Exemplo de validação do modelo bilinear

Para validar a implementação computacional do modelo constitutivo bilinear, adota-se o problema apresentado na Figura 3.4, o qual foi proposto por Du *et al.* (2019). A espessura do domínio apresentado na Figura 3.4 (a) é igual a 0,01 m, e as propriedades mecânicas do material à tração são fixas e iguais a $E_t = 30$ GPa e $\nu_t = 0,3$.

Figura 3.4 - Validação do modelo bilinear: (a) Geometria e condições de contorno; (b) Treliza idealizada



Para verificar a validade do modelo constitutivo e sua eficiência, Du *et al.* (2019) propuseram que fosse obtida a solução analítica dos valores de inclinação e de seções transversais ótimas da treliça da Figura 3.4 (b), que minimizem a flexibilidade da estrutura, sujeita a uma restrição de volume. Neste trabalho foi adotado o problema de otimização em sua forma aninhada:

Obter: $\theta_1, \theta_2, A_1, A_2$

Que minimiza: $f(\theta_1, \theta_2, A_1, A_2) = \frac{N_1^2 l}{E_1 A_1 \sin \theta_1} + \frac{N_2^2 l}{E_2 A_2 \sin \theta_2}$

Tal que: $\frac{A_1 l}{\sin \theta_1} + \frac{A_2 l}{\sin \theta_2} = V_0$ (3.101)

$$0 < \theta_i < \frac{\pi}{2}, i = 1, 2$$

Com: $N_1 \cos \theta_1 - N_2 \cos \theta_2 = 10$

$$N_1 \sin \theta_1 + N_2 \sin \theta_2 = 0$$

Em (3.101), a condição do equilíbrio de forças no ponto de aplicação da carga é atendida pois para o cálculo da função objetivo, os esforços normais nas barras são calculados a partir das equações de equilíbrio de forças nodais, com os valores das inclinações atualizados.

O problema de otimização foi solucionado utilizando a função nativa do Matlab, `fmincon`. Essa função faz parte do pacote de otimização e é aplicada a problemas de otimização com

restrição cuja função objetivo é uma função não-linear das variáveis de projeto. O Apêndice C apresenta como foi feita a implementação e uso da função.

Sabe-se que a barra 1 deste problema é tracionada, logo $E_1 = E_t$, e que a barra 2 é comprimida, $E_2 = E_c$. Adotando $V_0 = 0,004 \text{ m}^3$ e tomando como valores iniciais que $A_1 = A_2 = 0,006 \text{ m}^2$ e que $\theta_1 = 30^\circ$ e $\theta_2 = 90^\circ$, obtém-se os resultados apresentados na Tabela 3.1.

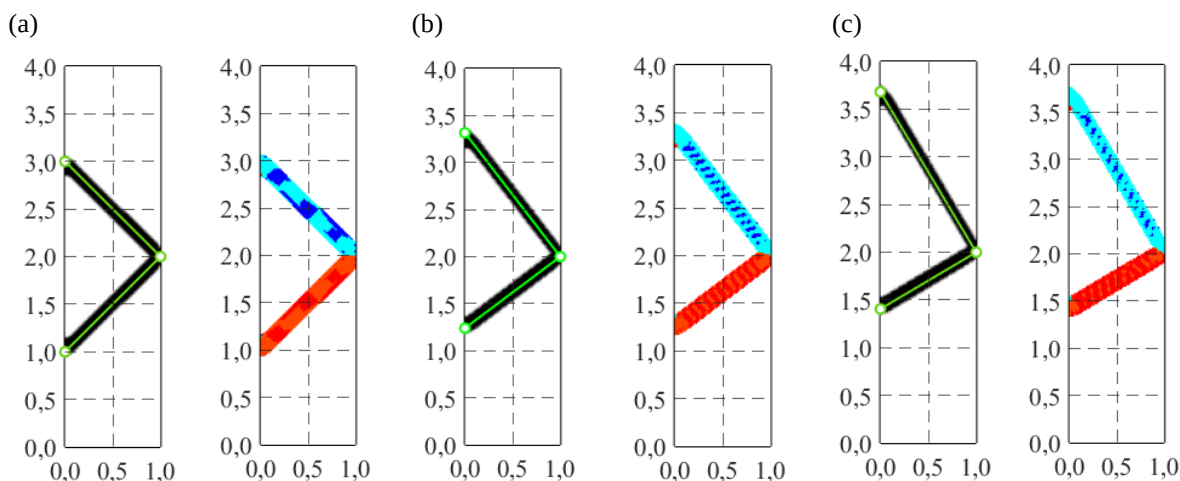
Tabela 3.1 - Soluções ótimas do problema (3.101) para diferentes relações E_t / E_c

E_t / E_c	θ_1^* (rad)	θ_2^* (rad)	A_1^* (m ²)	A_2^* (m ²)	h_1^* (m)	h_2^* (m)
1	0,7854	0,7854	0,0014	0,0014	1,0000	1,0000
3	0,6498	0,9210	0,0012	0,0016	1,3161	0,7598
8	0,5364	1,0344	0,0010	0,0017	1,6818	0,5946

Os valores de h_1 e h_2 , e a relação entre as áreas A_1 e A_2 para as diferentes relações de E_t / E_c , na Tabela 3.1, são utilizados para validar as soluções obtidas pelo processo de otimização topológica. Espera-se, que para um aumento da relação E_t / E_c , que a treliça se torne assimétrica com $h_1 > h_2$ e $A_1 < A_2$.

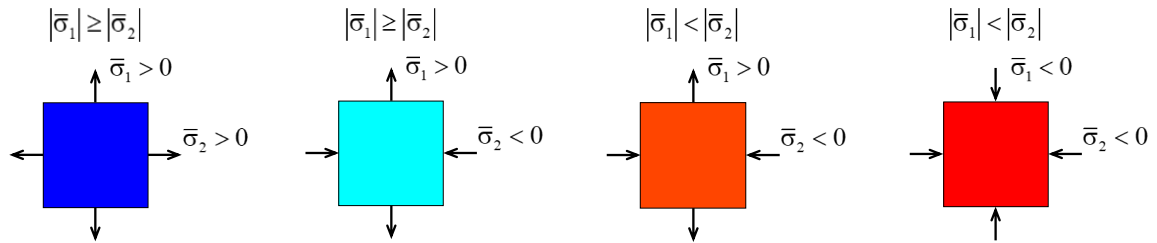
Na Figura 3.5 são apresentadas as soluções do processo de otimização topológica considerando o domínio e condições de contorno da Figura 3.4 (a) para as mesmas relações de E_t / E_c da Tabela 3.1. O valor de ν_c foi definido a fim de que a relação $E_t \nu_c = E_c \nu_t$ seja respeitada. O domínio foi discretizado em uma malha estruturada de 240 x 60 elementos quadrados. A fração de volume é igual a 10% e o raio do filtro de densidade igual a 0,01 m. Também são mostradas as barras com as posições obtidas na Tabela 3.1.

Figura 3.5 - Validação do modelo bilinear: Soluções: (a) $E_t / E_c = 1$; (b) $E_t / E_c = 3$; (c) $E_t / E_c = 8$;



Na Figura 3.5 são apresentadas as soluções topológicas e a identificação do estado de tensão dos elementos na topologia final obtida. A identificação do estado de tensão é feita com base nas tensões principais calculadas no centroide dos elementos. A cor vermelha indica que as duas tensões principais são de compressão, a cor azul indica que as duas tensões principais são de tração, a cor laranja indica que a tensão principal de maior valor absoluto é de compressão e a de menor valor absoluto de tração e a cor ciano indica que tensão principal de maior valor absoluto é de tração e a de menor valor absoluto de compressão. A Figura 3.6 apresenta este esquema de identificação do estado de tensão dos elementos da topologia final obtida, sendo que $\bar{\sigma}_1 \geq \bar{\sigma}_2$.

Figura 3.6 - Cores utilizadas para identificar o estado de tensão dos elementos da topologia obtida



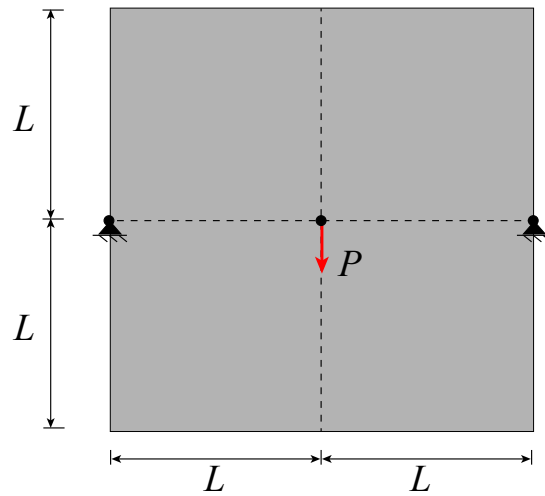
Nas soluções da Figura 3.5 que para um caso linear elástico em que a relação E_t / E_c é igual a 1, a solução é simétrica e com as barras conectadas por um ângulo de 90° , conforme obtido pela solução do problema (3.101) na Tabela 3.1. Para os demais casos, a condição de simetria é perdida devido a relação tensão-deformação ser assimétrica. Observa-se que, à medida que a relação E_t / E_c aumenta, a seção transversal do membro tracionado diminui e a do membro comprimido aumenta, conforme esperado. A comparação das soluções indica uma boa concordância entre resultados, o que valida o modelo constitutivo e sua implementação.

Além disso, Du *et al.* (2019) comentam que o padrão de alternância do estado de tensão das soluções apresentadas na Figura 3.5 é provocado pelo modelo constitutivo, e que, embora isso aconteça, os campos de deslocamentos possuem uma variação contínua.

3.5.2. Exemplo de validação do modelo hiperelástico

Para validar a implementação computacional do modelo constitutivo hiperelástico, utiliza-se um dos exemplos apresentado por Chi *et al.* (2019), cuja geometria está apresentada na Figura 3.7.

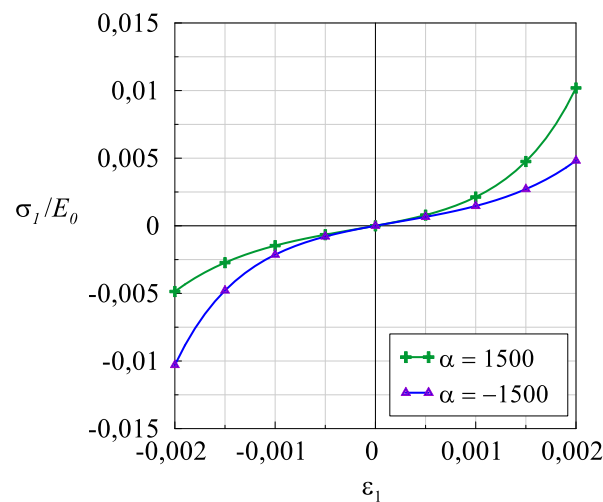
Figura 3.7 - Exemplo 01: Geometria



A dimensão L foi adotada igual a 0,5 m e o valor da carga P igual a 1000 N. O domínio de projeto foi discretizado em uma malha estruturada de 200 x 200 elementos quadriláteros. Foi prescrita uma fração de volume de 7%, e o valor inicial do raio do filtro de densidade R_0 foi de 0,02 m. Foi assumida a hipótese de estado plano de deformação.

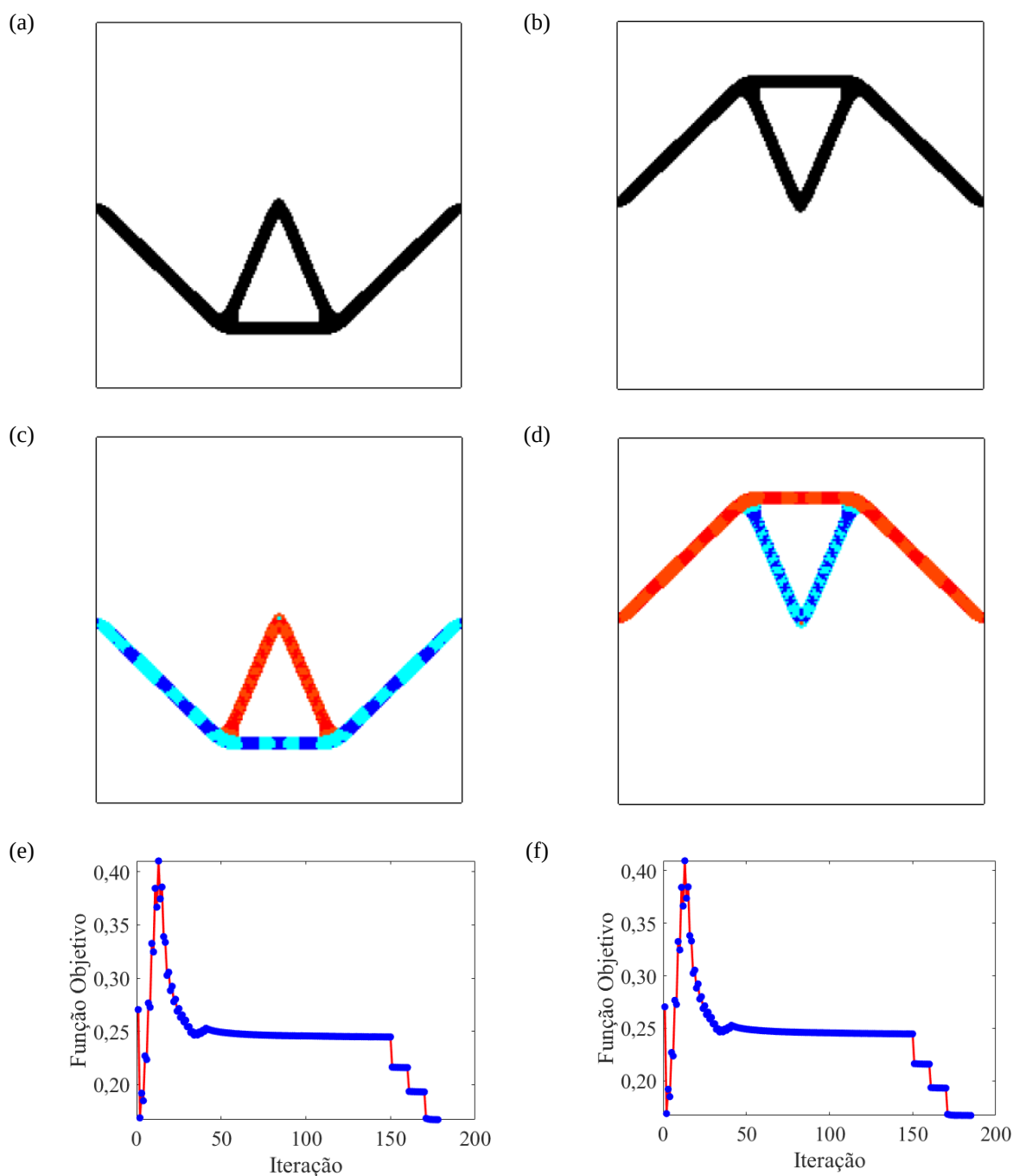
Foi utilizado o modelo de Ogden compressível adotando a energia de deformação específica definida em (3.62) com $M=1$. Os parâmetros do modelo de Ogden foram obtidos considerando $E_0 = 70$ MPa e coeficiente de Poisson igual a 0,3. As curvas tensão-deformação são apresentadas na Figura 3.8.

Figura 3.8 - Curvas tensão - deformação em estado plano de deformação



As soluções obtidas com a formulação utilizando material hiperelástico, a identificação do estado de tensão da topologia e a evolução da função objetivo de cada uma delas são apresentadas na Figura 3.9.

Figura 3.9 - Soluções topológicas; identificação do estado de tensão da topologia final; e evoluções da função objetivo: (a), (c) e (e) $\alpha = 1500$; (b), (d) e (f) $\alpha = -1500$



Observa-se que, com a adoção de um modelo constitutivo hiperelástico de Ogden, a solução topológica se torna dependente dos parâmetros do material. Neste caso, com o valor do parâmetro $\alpha = 1500$, o modelo constitutivo apresenta um ganho de rigidez à tração maior que um ganho de rigidez à compressão, e, assim, a solução apresentou uma predominância de membros tracionados, como pode ser observado na Figura 3.9 (c). E com $\alpha = -1500$, o modelo constitutivo apresenta um ganho de rigidez à compressão maior que um ganho de rigidez à

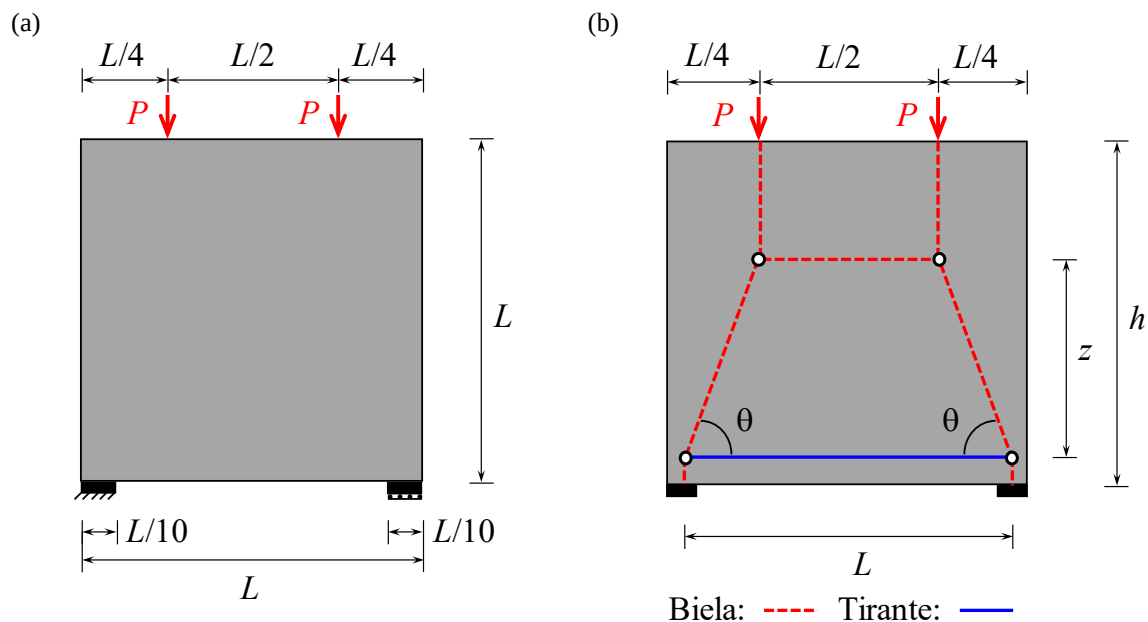
tração, e consequente a solução apresentou uma predominância de membros comprimidos, como pode ser observado na Figura 3.9 (d).

Quanto à evolução da função objetivo, os saltos que ocorrem no início do processo de otimização se devem ao esquema de continuação utilizado para o valor da penalização do modelo SIMP, a qual é aumentada de 1 até atingir um valor igual a 3. E as reduções abruptas no valor da função objetivo após um certo número de iterações ocorrem devido à continuação do valor do raio do filtro de densidade.

3.5.3. Exemplo 01: Viga parede

Este exemplo é apresentado para discutir o uso de soluções topológicas pelo Método da Densidade para obtenção dos caminhos de força em estruturas de concreto armado, servindo como base para a idealização de Modelos de Bielas e Tirantes (MBT). A Figura 3.10 apresenta a geometria do problema, que consiste em uma viga parede, e um MBT comumente utilizado para seu dimensionamento.

Figura 3.10 – Exemplo 01: (a) Geometria; (b) Modelo de Bielas e Tirantes*



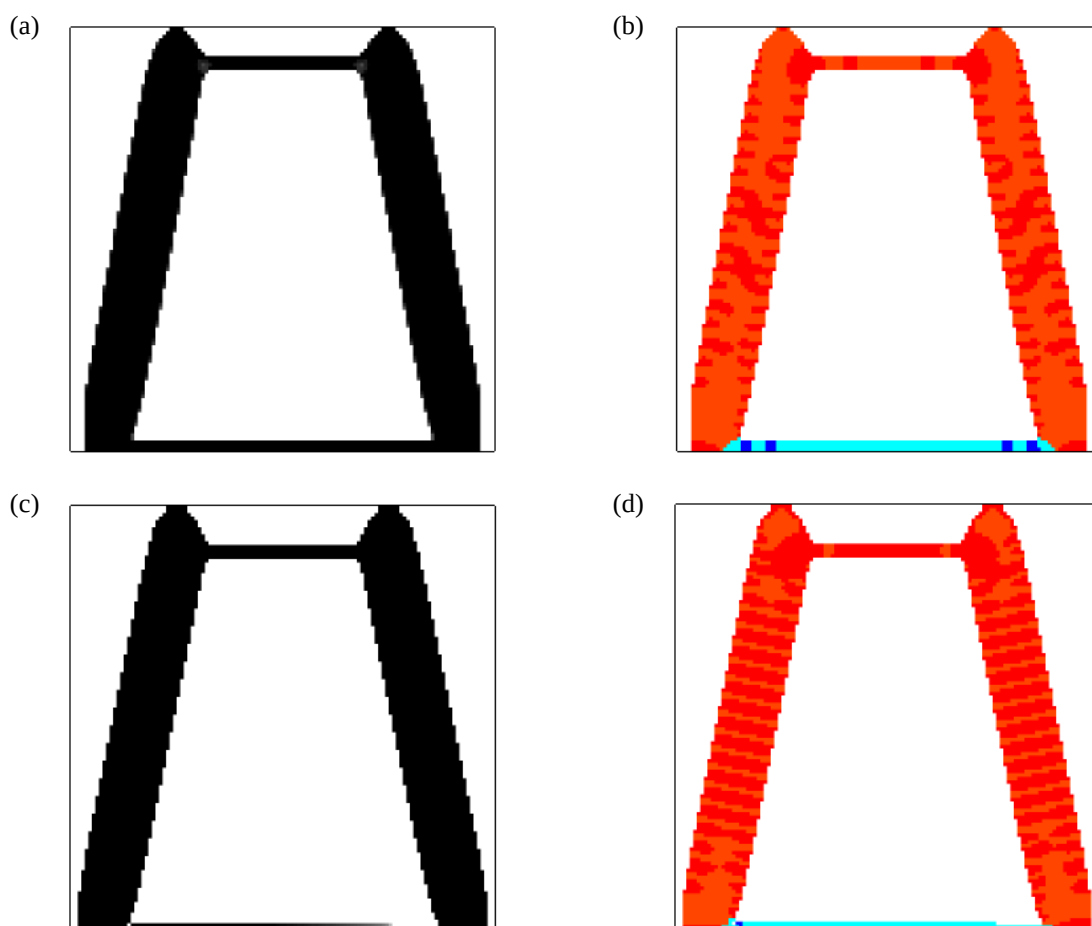
* Adaptado de Schlaich e Schäfer (1991)

Para este exemplo, foi adotada uma dimensão L igual 1,2 m e carga P igual a 10 kN. Foi utilizada uma malha estruturada de 120 x 120 elementos quadrados. Foram testados o uso de dois materiais. Primeiro foi obtida a solução com um modelo com comportamento elástico

linear, com módulo de elasticidade igual a 210 GPa e coeficiente de Poisson igual a 0,3, tanto na tração quanto na compressão. Posteriormente, foi obtida a solução com o modelo elástico bilinear adotando módulo de elasticidade em compressão igual a 24 GPa e em tração igual a 210 GPa, e coeficiente de Poisson em tração igual a 0,3 e em compressão igual a 0,0342. O valor do coeficiente de Poisson em compressão é definido de modo que seja respeitada a relação $E_t / E_c = \nu_t / \nu_c$.

O raio inicial do filtro de densidade é igual a 0,02 m e a fração de volume adotada foi igual a 30%. As soluções obtidas são apresentadas na Figura 3.11.

Figura 3.11 – Exemplo 01:(a) Solução obtida com material com comportamento linear; (b) Identificação do estado de tensão da solução obtida com material com comportamento linear; (c) Solução obtida com material com comportamento bilinear; (d) Identificação do estado de tensão da solução obtida com material com comportamento bilinear



Observa-se que não há diferenças significativas, neste exemplo, caso seja considerado um material com comportamento linear ou bilinear. Entre as diferenças observadas, destaca-se que

a quantidade de material gasta na região do tirante foi reduzida no caso em que foi utilizado o material com modelo bilinear com maior rigidez à tração do que à compressão.

Além disso, destaca-se a semelhança da solução obtida via otimização topológica com o modelo de bielas e tirantes apresentado na Figura 3.10 (b). Contudo, observa-se uma inclinação da biela comprimida superior ao limite geralmente estabelecido nas normas de projeto de estruturas de concreto. Isso se dá porque nenhuma restrição nesse sentido foi imposta ao problema de otimização.

3.5.4. Exemplo 02: Viga parede com furo

Esse exemplo também avalia a influência do modelo constitutivo na topologia obtida. Usam-se os mesmos materiais do exemplo anterior. A geometria e as condições de contorno do problema são apresentadas na Figura 3.12, para a qual foi utilizada uma malha composta por 25000 elementos finitos poligonais. A carga distribuída P é igual a 10 kN/m. O valor inicial do raio do filtro de densidade é igual a 0,2 m e a fração de volume adotada foi igual a 30%. As soluções obtidas são apresentadas na Figura 3.13.

Figura 3.12 - Exemplo 02: Geometria, condições de contorno e composição da malha de elementos finitos poligonais

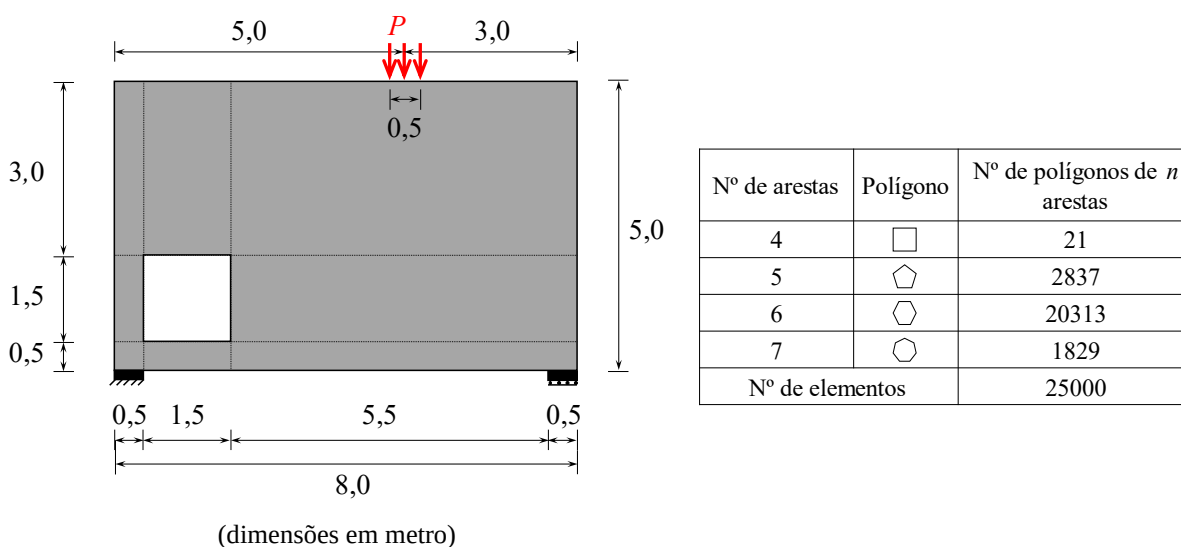
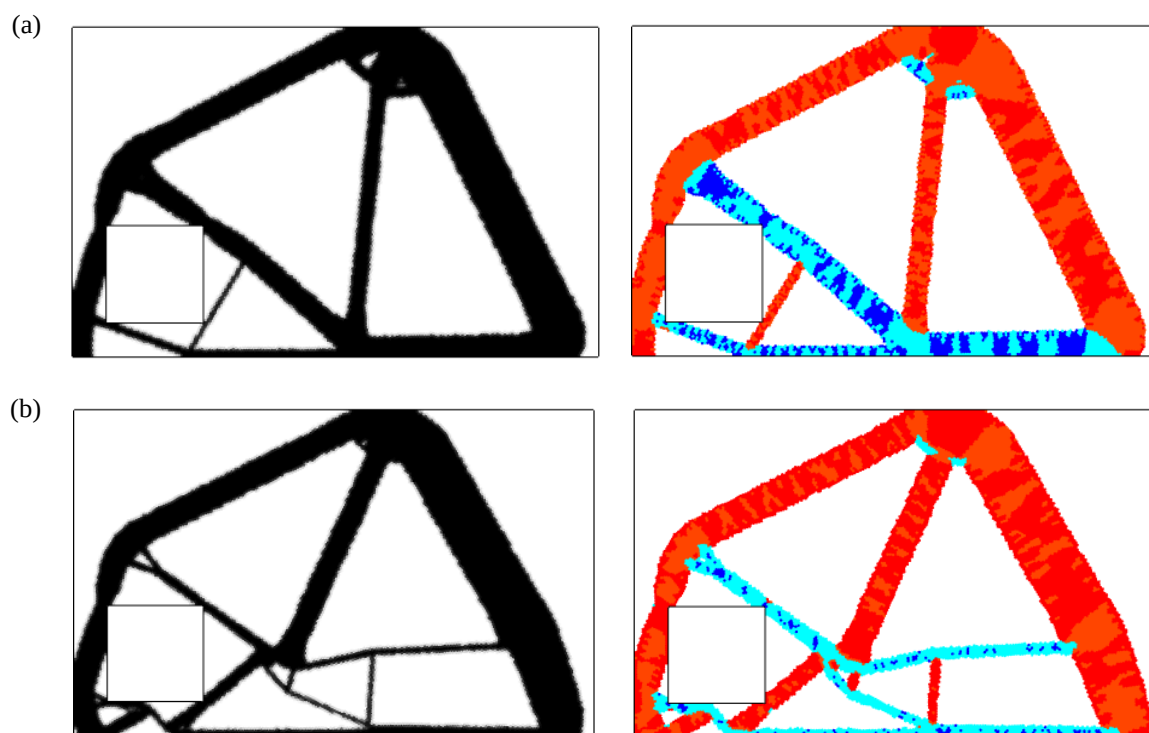


Figura 3.13 - Exemplo 02 – Soluções topológicas e identificação do estado de tensão: (a) Material linear; (b) Material bilinear



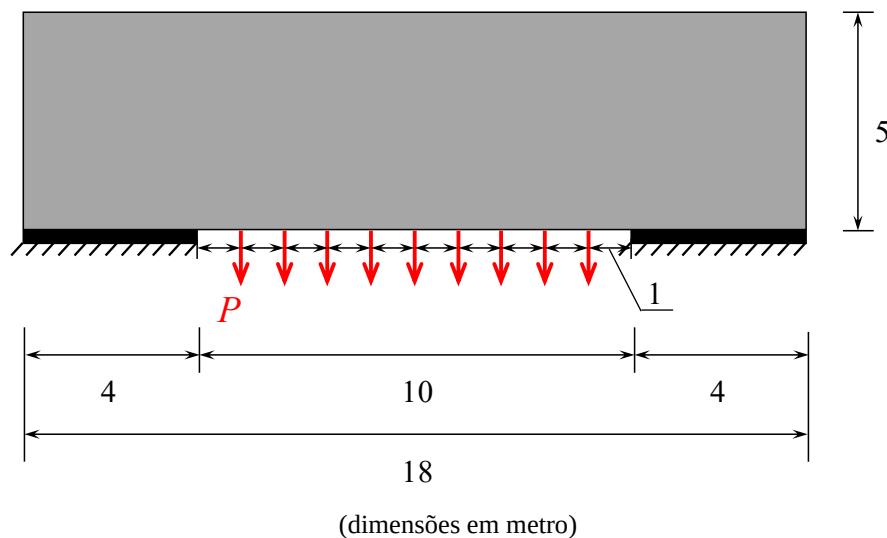
Nas soluções apresentadas na Figura 3.13, observa-se que o modelo constitutivo influenciou na solução obtida. Com o modelo bilinear, pelo fato de o material apresentar uma rigidez à tração mais elevada, os membros da topologia que são tracionados passaram a ter uma dimensão reduzida.

Contudo, destaca-se que o ideal é considerar no processo de otimização de elementos de concreto armado dois materiais, um com uma rigidez à compressão mais elevada e à tração reduzida, e um material com uma rigidez à tração mais elevada e à compressão reduzida. Assim, o coeficiente de Poisson associado à cada uma das rigidezes mais elevadas é definido apropriadamente.

3.5.5. Exemplo 03: Domínio de uma ponte

Este exemplo consiste no domínio de uma ponte, cuja definição de geometria e condições de contorno são inspirados no exemplo apresentado por Zhang, Ramos Jr. e Paulino (2017). O domínio é discretizado em uma malha estruturada de 360 x 100 elementos quadrados e o valor de P é igual a 10 kN.

Figura 3.14 - Exemplo 03: Geometria e condições de contorno



São apresentadas quatro soluções, uma para cada tipo de material: um material linear; dois materiais com comportamento bilinear e um material com o modelo hiperelástico de Ogden compressível. Os parâmetros dos materiais são apresentados na Tabela 3.2.

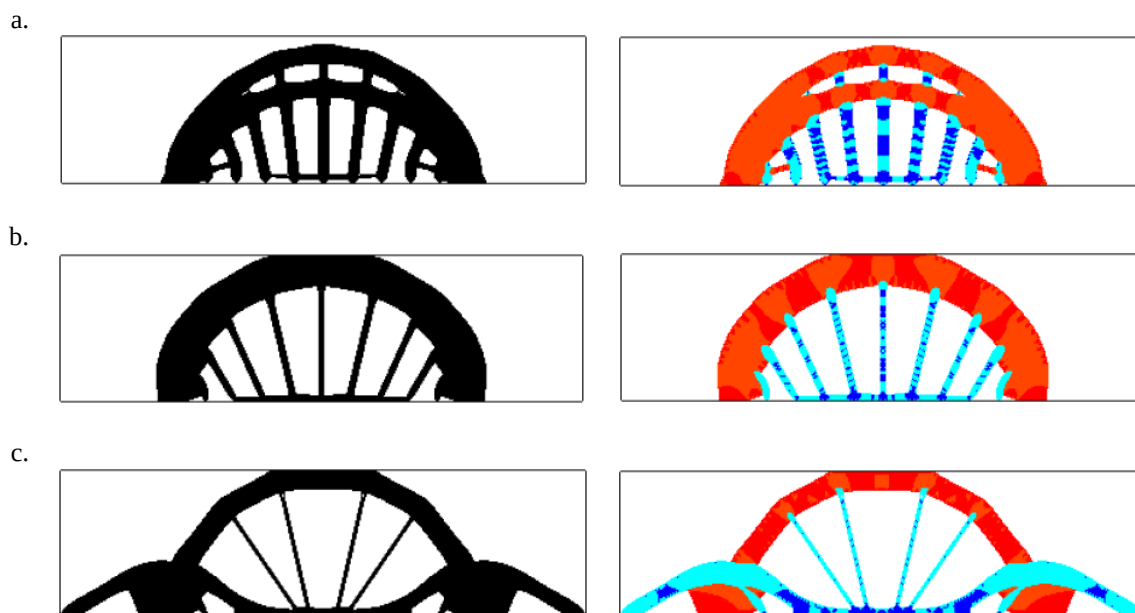
Tabela 3.2 - Parâmetros dos materiais utilizados no Exemplo 03

Material	Modelo	E_t (MPa)	E_c (MPa)	ν_t	ν_c
1	Linear	210000,0	210000,0	0,3	0,3
2	Bilinear	210000,0	24000,0	0,3	0,0342
3	Bilinear	210000,0	9450,0	0,3	0,0135
Material	Modelo	E_0 (MPa)	ν	α	
4	Ogden	70,0	0,3	1500	

Os três primeiros materiais na Tabela 3.2 foram definidos de forma que o Material 1 represente um material que à tração e à compressão tenha um módulo de elasticidade igual ao do aço; o Material 2 represente um material que à tração tenha o módulo de elasticidade igual ao do aço e à compressão igual ao do concreto; e o Material 3 represente um material fictício em que à tração tenha um módulo de elasticidade igual ao do aço e à compressão tenha um módulo igual a 9450 MPa. Em todos os casos, o coeficiente de Poisson à tração é igual ao do aço, e à compressão o valor é definido de forma que a relação $E_t / E_c = \nu_t / \nu_c$ seja satisfeita.

Foi adotado uma fração de volume de 30% e um raio inicial para o filtro de densidade igual a 0,02 m. Primeiro se apresentam as soluções obtidas com os três materiais com comportamento linear ou bilinear.

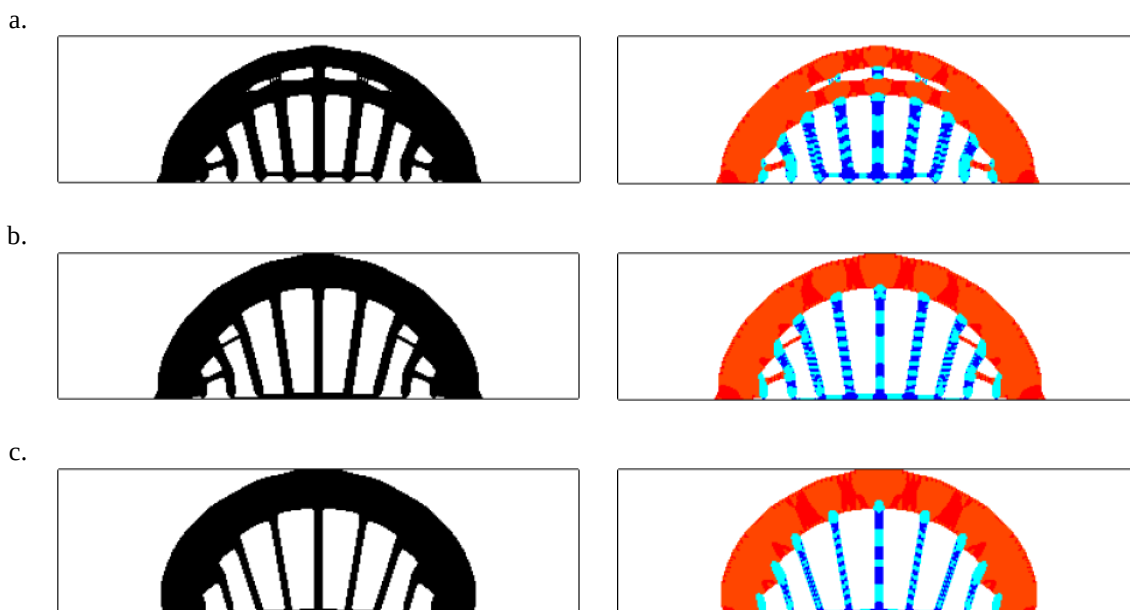
Figura 3.15 - Exemplo 03: Soluções com materiais bilineares: (a) Material 1; (b) Material 2; (c) Material 3



Na Figura 3.15, as soluções obtidas mudam à medida que a relação E_t / E_c aumenta. A solução obtida com o Material 1, Figura 3.15 (a), apresenta a solução de uma ponte em arco com uma bifurcação no vértice do arco. A solução obtida com o Material 2, Figura 3.15 (b), idealizada para representar uma ponte em aço e concreto, tem como diferença que a dimensão dos tirantes é reduzida e a dimensão do arco é ampliada. Por fim, a solução com o Material 3, Figura 3.15 (c), mostra que caso a rigidez do material à compressão seja ainda menor, a solução passa a apresentar uma topologia que funciona predominante à tração, com a inclusão de novos tirantes.

Foram obtidas também soluções utilizando o Material 4 para diferentes níveis de carregamento.

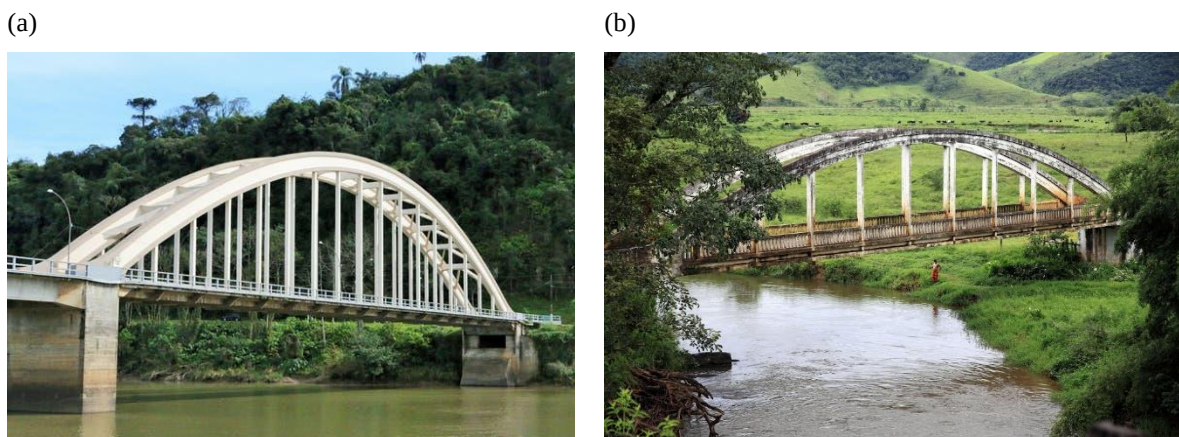
Figura 3.16 - Exemplo 03: Soluções com Material 4 para (a) $P = 10$ kN; (b) $P = 10000$ kN; (c) $P = 50000$ kN



A solução obtida com o Material 4 é dependente do nível de carregamento. À medida que o nível de carregamento aumenta, a região de tração é reduzida pois o material torna-se mais rígido, e a região de compressão aumenta. Embora, do ponto de vista prática, o leiaute obtido tenha sido o de uma ponte em arco.

Por fim, comparam-se as soluções obtidas com algumas pontes existentes, apresentadas na Figura 3.17.

Figura 3.17 - Exemplos de pontes: (a) Ponte Manoel Ribas; (b) Ponte na RJ-161



Fontes : (a): <https://www.minube.com.br/sitio-preferido/ponte-manoel-ribas-a3635028> (Acesso em 08/11/2021)
 (b): <https://mapio.net/pic/p-66642038/> (Acesso em 08/11/2021)

É possível notar a semelhança do leiaute das pontes apresentadas na Figura 3.17 com as soluções obtidas pelo processo de otimização topológica. Porém, é interessante comparar a

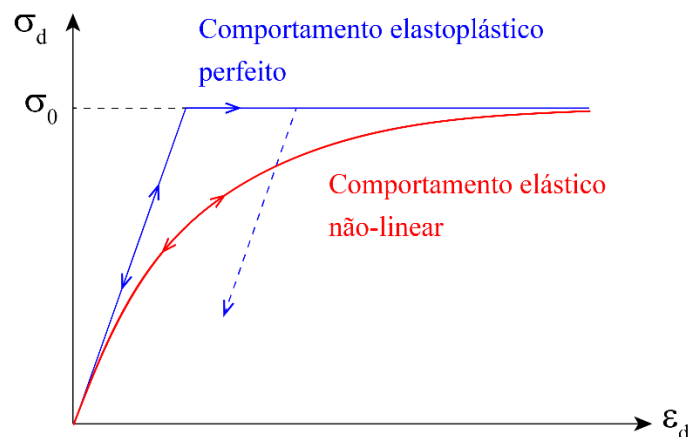
inclinação dos tirantes, uma vez que as soluções do processo de otimização, mesmo para uma ponte totalmente em aço, indicam que os tirantes não são posicionados de forma ortogonal ao tabuleiro, como é feito nas pontes existentes apresentadas. O motivo provavelmente se dá por motivos construtivos.

CAPÍTULO 4

PROBLEMA DE MAXIMIZAÇÃO DA ENERGIA INTERNA DE DEFORMAÇÃO

Neste capítulo apresenta-se a revisão bibliográfica e a formulação matemática do problema de maximização da energia interna de deformação em otimização topológica. Utiliza-se o modelo elástico não-linear proposto por Pasquali (2008) na forma da proposta de Zhao, Ramos Jr. e Paulino (2019). O limite de tensão de um material com comportamento elastoplástico perfeito com critério de resistência de von Mises é obtido indiretamente utilizando um modelo de material com comportamento elástico não-linear. A Figura 4.1 apresenta a comparação do comportamento tensão-deformação do material elastoplástico perfeito e do material elástico não-linear, ambos em tração uniaxial.

Figura 4.1 - Comparação do modelo elastoplástico perfeito com o modelo elástico não-linear



Fonte: Adaptado de Pasquali (2008)

O modelo constitutivo elástico não-linear proposto por Pasquali (2008) é definido de forma a se obter uma aproximação pelo interior do domínio de cargas limites. Além disso, destaca-se que o modelo elástico não-linear referido foi proposto para ser utilizado em análises com carregamento monotônico.

4.1. DEFINIÇÃO DO MODELO CONSTITUTIVO

Na definição dos critérios de escoamento da teoria da Plasticidade é conveniente realizar a decomposição aditiva dos tensores de tensão e de deformação em uma parcela hidrostática e uma parcela desviadora, conforme apresentado em (4.1) e (4.2), respectivamente.

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I} + \mathbf{s} = \sigma_m \mathbf{I} + \mathbf{s} \quad (4.1)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} + \boldsymbol{\varepsilon}_d = \frac{1}{3} \varepsilon_v \mathbf{I} + \boldsymbol{\varepsilon}_d \quad (4.2)$$

Na equação (4.1) a tensão normal média, σ_m , é definida em função do somatório das tensões normais, representado pelo operador traço, $\text{tr}()$, sobre o tensor de tensões. O mesmo se dá na equação (4.2) para a deformação volumétrica, ε_v , definida em função do somatório das deformações normais.

Em materiais com comportamento elástico linear, a tensão normal média relaciona-se com a deformação volumétrica por meio do módulo volumétrico, K , e as componentes do tensor de tensões desviadoras relacionam-se as componentes do tensor de deformações desviadoras por meio do segundo parâmetro de Lamé, μ , também conhecido como módulo de cisalhamento, conforme apresentado em (4.3).

$$\boldsymbol{\sigma} = K \varepsilon_v \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}_d \quad (4.3)$$

A partir do tensor de tensões decomposto em suas parcelas hidrostática e desviadora em função das componentes de deformação, Pasquali (2008) propôs um modelo elástico não-linear compatível com o critério de escoamento de von Mises, apresentado em (4.4).

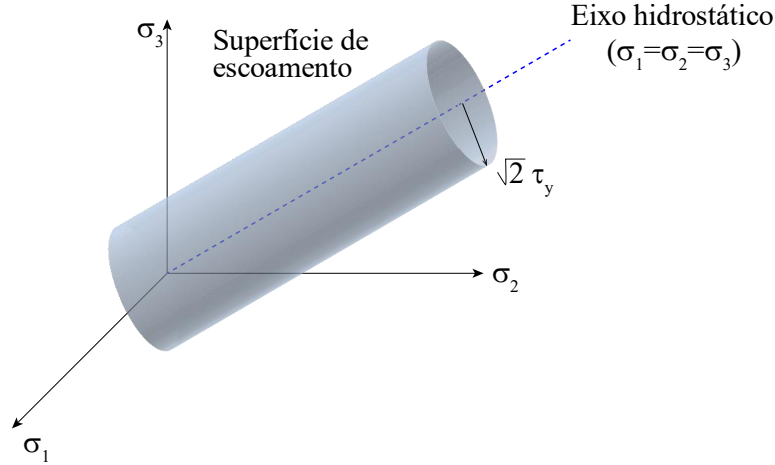
$$f_{VM}(\boldsymbol{\sigma}) = \|\mathbf{s}\| - \sqrt{2} \tau_y \leq 0 \quad (4.4)$$

Onde τ_y corresponde à tensão de escoamento em um estado de cisalhamento puro; e a norma do tensor desviador é calculada conforme a equação (4.5).

$$\|\mathbf{s}\| = \sqrt{\mathbf{s}:\mathbf{s}} = \sqrt{s_{ij} s_{ij}} \quad (4.5)$$

No espaço de tensões de Haigh-Westergaard, cujo eixos do sistema de coordenadas cartesianas correspondem às tensões principais, o critério de ruptura de von Mises é representado geometricamente por um cilindro de raio igual a $\sqrt{2} \tau_y$, conforme representado na Figura 4.2.

Figura 4.2 - Superfície de ruptura de Von Mises



O critério de Von Mises, definido em (4.4) e ilustrado na Figura 4.2, depende apenas da parcela desviadora do tensor de tensões. Com base nisso, o modelo de material elástico não-linear proposto por Pasquali (2008) é definido de modo que a não linearidade esteja associada apenas a essa parcela, conforme apresentado em (4.6).

$$\boldsymbol{\sigma} = K \varepsilon_v \mathbf{I} + 2 \mu(\|\boldsymbol{\varepsilon}_d\|) \boldsymbol{\varepsilon}_d \quad (4.6)$$

O segundo parâmetro de Lamé, μ , é uma função da norma da parcela desviadora do tensor de deformação. Essa função é definida de forma que o critério de von Mises (4.4) seja satisfeito de forma assintótica, como apresentado na equação (4.7).

$$\lim_{(\|\boldsymbol{\varepsilon}_d\|/\varepsilon_{ref}) \rightarrow \infty} f_{VM}(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \rightarrow \lim_{(\|\boldsymbol{\varepsilon}_d\|/\varepsilon_{ref}) \rightarrow \infty} 2\mu(\|\boldsymbol{\varepsilon}_d\|)\|\boldsymbol{\varepsilon}_d\| - \sqrt{2}\tau_y = 0 \quad (4.7)$$

A deformação ε_{ref} corresponde a um valor de referência, o qual deve ser um valor pequeno que corresponde a uma fração da deformação atingida no fim do regime elástico. A equação (4.7) implica que a função $\mu(\|\boldsymbol{\varepsilon}_d\|)$ deve satisfazer a relação:

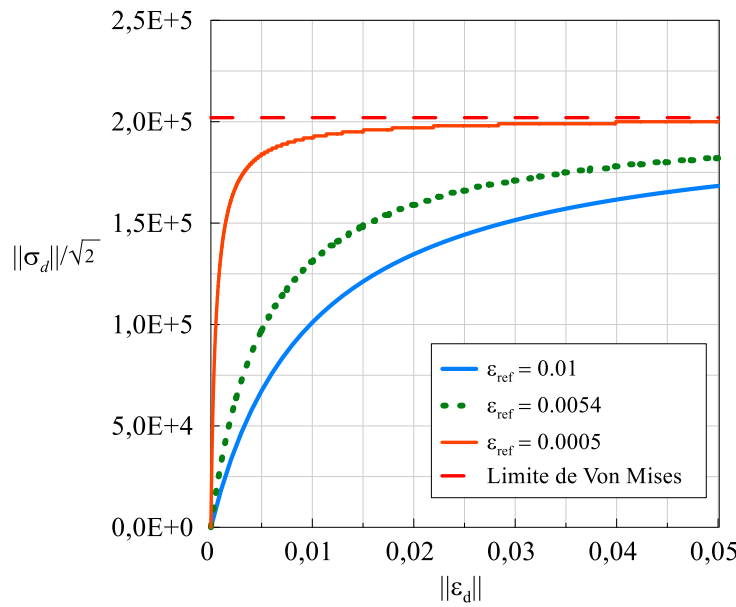
$$\mu(\|\boldsymbol{\varepsilon}_d\|) \approx \frac{\sqrt{2}\tau_y}{2\|\boldsymbol{\varepsilon}_d\|}, \text{ se } \frac{\|\boldsymbol{\varepsilon}_d\|}{\varepsilon_{ref}} \gg 1 \quad (4.8)$$

Portanto, pode-se adotar a forma (4.9) a fim que a condição (4.8) seja atendida.

$$\mu(\|\boldsymbol{\varepsilon}_d\|) = \frac{\sqrt{2}\tau_y}{2} \frac{1}{\varepsilon_{ref} + \|\boldsymbol{\varepsilon}_d\|} \quad (4.9)$$

A Figura 4.3 ilustra o comportamento do modelo proposto evidenciando a influência do parâmetro de deformação de referência, ε_{ref} . Nota-se que, à medida que se diminui o valor de ε_{ref} , o comportamento assintótico torna-se mais evidente, aproximando-se de um comportamento com limite de tensão.

Figura 4.3 - Comportamento em cisalhamento puro do modelo elástico não-linear assintótico (Para $\tau_y = 2,02E+5$)



Fonte: Adaptado de Zhao, Ramos Jr. e Paulino (2019)

Pasquali (2008) e Zhao, Ramos Jr. e Paulino (2019) destacam que, como o módulo volumétrico, K , é constante, tem-se que:

$$\lim_{(\|\boldsymbol{\varepsilon}_d\|/\varepsilon_{ref}) \rightarrow \infty} \frac{\mu(\|\boldsymbol{\varepsilon}_d\|)}{K} = 0 \quad (4.10)$$

A relação apresentada em (4.10) exprime que para grandes valores de $\|\boldsymbol{\varepsilon}_d\|/\varepsilon_{ref}$ o material elástico não-linear comporta-se de forma incompressível.

Como o material é elástico, o modelo constitutivo pode ser caracterizado pela função de energia de deformação específica conforme (4.11).

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}_v, \|\boldsymbol{\varepsilon}_d\|)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}_v, \|\boldsymbol{\varepsilon}_d\|)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_v} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_v}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}_v, \|\boldsymbol{\varepsilon}_d\|)}{\partial \|\boldsymbol{\varepsilon}_d\|} \frac{\partial \|\boldsymbol{\varepsilon}_d\|}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (4.11)$$

Antes de definir a função $\Psi(\varepsilon_v, \|\varepsilon_d\|)$, é necessário calcular as derivadas da deformação volumétrica e da norma do tensor de deformações desviadoras em relação ao tensor de deformações. Sua obtenção é apresentada a seguir, em notação indicial.

$$\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \delta_{ik} \delta_{kj} = \delta_{ij} = \mathbf{I} \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial \|\varepsilon_d\|}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial \sqrt{\varepsilon_{d_{kl}} \varepsilon_{d_{kl}}}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{d_{kl}} \varepsilon_{d_{kl}}}} \left(\frac{\partial \varepsilon_{d_{kl}}}{\partial \varepsilon_{ij}} \varepsilon_{d_{kl}} + \varepsilon_{d_{kl}} \frac{\partial \varepsilon_{d_{kl}}}{\partial \varepsilon_{ij}} \right) = \frac{1}{\|\varepsilon_d\|} \left(\frac{\partial \varepsilon_{d_{kl}}}{\partial \varepsilon_{ij}} \varepsilon_{d_{kl}} \right) \quad (4.13)$$

A derivada da parcela desviadora do tensor de deformação em relação ao tensor de deformação é determinada fazendo uso da equação (4.2), conforme indicado em (4.14).

$$\frac{\partial \varepsilon_{d_{kl}}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}} - \frac{1}{3} \frac{\partial \varepsilon_{mm}}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta_{kl} = \delta_{ki} \delta_{lj} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (4.14)$$

Substituindo-se a equação (4.14) em (4.13), chega-se a (4.15).

$$\frac{\partial \|\varepsilon_d\|}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{1}{\|\varepsilon_d\|} \left(\varepsilon_{d_{ij}} - \frac{1}{3} \varepsilon_{d_{kk}} \delta_{ij} \right) = \frac{\varepsilon_d}{\|\varepsilon_d\|} \quad (4.15)$$

Na equação (4.15) o traço da parcela desviadora do tensor de deformações é nulo por definição. Logo, substituindo-se as equações (4.15) e (4.12) em (4.11), tem-se (4.16).

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Psi(\varepsilon_v, \|\varepsilon_d\|)}{\partial \varepsilon_v} \mathbf{I} + \frac{\partial \Psi(\varepsilon_v, \|\varepsilon_d\|)}{\partial \|\varepsilon_d\|} \frac{\varepsilon_d}{\|\varepsilon_d\|} \quad (4.16)$$

Comparando-se as equações (4.16) com (4.6), conclui-se que:

$$\frac{\partial \Psi(\varepsilon_v, \|\varepsilon_d\|)}{\partial \varepsilon_v} = K \varepsilon_v \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial \Psi(\varepsilon_v, \|\varepsilon_d\|)}{\partial \|\varepsilon_d\|} = 2\mu(\|\varepsilon_d\|) \|\varepsilon_d\| \quad (4.18)$$

Por fim, é importante impor a condição inicial de que, para um estado de deformação nula, a energia de deformação específica também seja nula:

$$\Psi(0,0) = 0 \quad (4.19)$$

A solução do sistema de equações diferenciais formado pelas equações (4.17) e (4.18), e considerando o valor inicial da equação (4.19), fornece (4.20).

$$\Psi(\varepsilon_v, \|\varepsilon_d\|) = \frac{1}{2} K \varepsilon_v^2 + \sqrt{2} \tau_y \left(\|\varepsilon_d\| - \varepsilon_{ref} \ln(\varepsilon_{ref} + \|\varepsilon_d\|) \right) \quad (4.20)$$

Para calcular a matriz de rigidez tangente do sistema, faz-se necessário determinar a matriz constitutiva tangente. Essa matriz é obtida a partir da derivação do tensor de tensões em relação ao tensor de deformações, conforme apresentado em (4.21), em notação indicial.

$$D_{ijkl} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} \quad (4.21)$$

Substituindo-se relação constitutiva não-linear proposta por Pasquali (2008), definida na equação (4.6), na relação (4.21), chega-se em:

$$D_{ijkl} = K \frac{\partial \varepsilon_{mm}}{\partial \varepsilon_{kl}} \delta_{ij} + 2 \frac{\partial \mu(\|\varepsilon_d\|)}{\partial \|\varepsilon_d\|} \frac{\partial \|\varepsilon_d\|}{\partial \varepsilon_{kl}} \varepsilon_{dij} + 2\mu(\|\varepsilon_d\|) \frac{\partial \varepsilon_{dij}}{\partial \varepsilon_{kl}} \quad (4.22)$$

Substituindo as derivadas já determinadas anteriormente nas equações (4.12), (4.14) e (4.15) em (4.22), tem-se (4.23).

$$D_{ijkl} = K \delta_{kl} \delta_{ij} + 2 \frac{\partial \mu(\|\varepsilon_d\|)}{\partial \|\varepsilon_d\|} \frac{\varepsilon_{dkl}}{\|\varepsilon_d\|} \varepsilon_{dij} + 2\mu(\|\varepsilon_d\|) \left(\delta_{ki} \delta_{lj} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right) \quad (4.23)$$

Neste trabalho, assim como no de Zhao, Ramos Jr. e Paulino (2019), serão analisados apenas problemas em estado plano de deformação. Nesse caso, o tensor de deformações pode ser escrito em notação de Voigt como um vetor de três componentes, e o tensor constitutivo tangente pode ser representado por uma matriz 3 x 3. Para definição correta das componentes da matriz constitutiva é importante se atentar que a componente associada à tensão cisalhante tangente é função da distorção angular ($\gamma_{12} = \varepsilon_{12} + \varepsilon_{21} = 2 \varepsilon_{12} = 2 \varepsilon_{21}$).

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \gamma_{12}} = \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \varepsilon_{12}} \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial \gamma_{12}} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \varepsilon_{21}} \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial \gamma_{12}} \rightarrow \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \gamma_{12}} = \frac{1}{2} (D_{1212} + D_{1221}) \quad (4.24)$$

Portanto, para a hipótese de estado plano de deformação, a matriz constitutiva tangente será dada pela equação (4.25) e as componentes da parcela desviadora do tensor de deformação pela equação (4.26).

$$\mathbf{D} = K \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{\mu(\|\boldsymbol{\varepsilon}_d\|)}{3} \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} + \frac{2}{\|\boldsymbol{\varepsilon}_d\|} \frac{\partial \mu(\|\boldsymbol{\varepsilon}_d\|)}{\partial \|\boldsymbol{\varepsilon}_d\|} \begin{bmatrix} \varepsilon_{d_{11}} \varepsilon_{d_{11}} & \varepsilon_{d_{11}} \varepsilon_{d_{22}} & \varepsilon_{d_{11}} \varepsilon_{d_{12}} \\ \varepsilon_{d_{22}} \varepsilon_{d_{11}} & \varepsilon_{d_{22}} \varepsilon_{d_{22}} & \varepsilon_{d_{22}} \varepsilon_{d_{12}} \\ \varepsilon_{d_{12}} \varepsilon_{d_{11}} & \varepsilon_{d_{12}} \varepsilon_{d_{22}} & \varepsilon_{d_{12}} \varepsilon_{d_{12}} \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_d = \begin{bmatrix} \frac{2\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}}{3} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \frac{2\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}}{3} \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

É importante, também, destacar que a matriz constitutiva tangente (4.25) é consistente na origem com a matriz constitutiva elástica linear para a hipótese de estado plano de deformação. Para confirmar isso, tem-se que na origem as componentes do tensor desviador expresso em (4.26) são nulas, o que implica que a terceira parcela da equação (4.25) é nula. Além disso, escreve-se o módulo de elasticidade à compressão em função do módulo de Young, E , e do coeficiente de Poisson, ν , conforme apresentado na equação (4.27) e substitui-se a deformação de referência pela equação (4.28).

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (4.27)$$

$$\varepsilon_{ref} = \sqrt{2} \tau_y \frac{1+\nu}{E} \quad (4.28)$$

Assim, tem-se:

$$\mathbf{D}_0 = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

4.2. SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES NÃO-LINEARES

Em estruturas compostas por materiais com limite de tensão, tal limite de resistência pode causar dificuldades para a solução do sistema de equações caso seja utilizada a estratégia de controle de força. Isso se dá porque pequenos incrementos de força fornecem grandes incrementos de deslocamento. Com base nisto, Zhao, Ramos Jr. e Paulino (2019) utilizaram um controle de energia para a solução do sistema de equações.

O sistema de equações de equilíbrio com a restrição de energia é apresentado em (4.30).

$$\begin{cases} \mathbf{F}_{int}(\mathbf{U}) = \lambda \mathbf{F}_{ext} \\ \mathbf{F}_{ext} \cdot \mathbf{U} = 2C_0 \end{cases} \quad (4.30)$$

Onde, λ corresponde ao fator de carga e C_0 a energia prescrita.

Para aplicar o método de Newton-Raphson para solucionar o sistema de forma iterativa, escreve-se o vetor de deslocamentos $\mathbf{U}$ como $\mathbf{U}_k + \Delta\mathbf{U}_k$, e lineariza-se a primeira equação em relação a $\mathbf{U}_k$. Assim, tem-se (4.31).

$$\begin{cases} \mathbf{F}_{int}(\mathbf{U}_k) + \mathbf{K}_t(\mathbf{U}_k) \Delta\mathbf{U}_k = \lambda_{k+1} \mathbf{F}_{ext} \\ \mathbf{F}_{ext} \cdot (\mathbf{U}_k + \Delta\mathbf{U}_k) = 2C_0 \end{cases} \quad (4.31)$$

A matriz de rigidez tangente é calculada da mesma forma apresentada na equação (3.88), usando a matriz constitutiva tangente apresentada em (4.25). Solucionando a primeira equação do sistema (4.31) em relação ao incremento do vetor de deslocamentos, obtém-se:

$$\Delta\mathbf{U}_k = \mathbf{K}_t(\mathbf{U}_k)^{-1} [\lambda_{k+1} \mathbf{F}_{ext} - \mathbf{F}_{int}(\mathbf{U}_k)] \quad (4.32)$$

Pela segunda equação do sistema (4.31), assumindo a igualdade $\mathbf{F}_{ext}^T \mathbf{U}_k = 2C_0$, chega-se a (4.33).

$$\mathbf{F}_{ext} \cdot \Delta\mathbf{U}_k = 0 \quad (4.33)$$

Substituindo (4.32) em (4.33), obtém-se a expressão para atualização do fator de carga.

$$\lambda_{k+1} = \frac{\mathbf{F}_{ext} \cdot \Delta\mathbf{U}_k'}{\mathbf{F}_{ext} \cdot \Delta\mathbf{U}_k''} \quad (4.34)$$

Com,

$$\Delta \mathbf{U}'_k = \mathbf{K}_t(\mathbf{U}_k)^{-1} \mathbf{F}_{int}(\mathbf{U}_k) \quad (4.35)$$

$$\Delta \mathbf{U}''_k = \mathbf{K}_t(\mathbf{U}_k)^{-1} \mathbf{F}_{ext} \quad (4.36)$$

O Quadro 4.1 apresenta o algoritmo para solução do sistema de equação não lineares utilizando o controle de energia.

Quadro 4.1 - Algoritmo de solução do sistema de equação não lineares com controle de energia

```

01: Inicializar:  $\mathbf{U}'_0 = \mathbf{0}$ ;  $\mathbf{K}_0$ ; tol; maxIter;
02: Solucione:  $\mathbf{K}_0 \mathbf{U}''_0 = \mathbf{F}_{ext}$ 
03: Calcule:  $\mathbf{U}_0 = 2\mathbf{C}_0 \mathbf{U}''_0 / \mathbf{F}_{ext}^T \mathbf{U}''_0$ 
04: Para k de 0 a maxIter faça
05:     Calcule:  $\mathbf{F}_{int}(\mathbf{U}_k)$  e  $\mathbf{K}_t(\mathbf{U}_k)$ 
06:     Regularize:  $\mathbf{K}_t(\mathbf{U}_k)$ 
07:     Solucione:  $\mathbf{K}_t(\mathbf{U}_k) \Delta \mathbf{U}'_k = \mathbf{F}_{int}(\mathbf{U}_k)$ 
08:     Solucione:  $\mathbf{K}_t(\mathbf{U}_k) \Delta \mathbf{U}''_k = \mathbf{F}_{ext}$ 
09:     Calcule  $\lambda_{k+1}$  com (4.34)
10:     Calcule  $\Delta \mathbf{U}_k = -\Delta \mathbf{U}'_k + \lambda_{k+1} \Delta \mathbf{U}''_k$ 
11:     Encontre:  $\xi_k$  (Respeitando:  $0 < \xi_{min} \leq \xi_k \leq 1$ )
12:     Atualize:  $\mathbf{U}_{k+1} = \mathbf{U}_k + \xi_k \Delta \mathbf{U}_k$ 
13:     Se  $\|\mathbf{R}(\mathbf{U}_k)\| / \|\mathbf{F}_{ext}\| < tol$  ou  $\|\Delta \mathbf{U}_k\| / (\|\mathbf{U}_{k+1}\| + 1) < tol$  então
14:         Break
15:     Fim se
16: Fim para

```

Fonte: Adaptado de Zhao, Ramos Jr. e Paulino (2019)

Para prevenir a possibilidade de a matriz de rigidez tangente se tornar singular quando o elemento finito se aproximar de um estado de deformação limite, aplica-se a regularização de Tikhonov à matriz de rigidez, conforme indicado na linha 06 do algoritmo do Quadro 4.1.

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{K}_t + \frac{\eta_0}{N_{GL}} \text{tr}(\mathbf{K}_t) \mathbf{I} \quad (4.37)$$

Onde, η_0 corresponde a um valor pequeno, geralmente adotado igual a 10^{-8} ; N_{GL} corresponde ao número de graus de liberdade e $\mathbf{I}$ corresponde à matriz identidade.

Além disso, conforme indicado na linha 09 do algoritmo do Quadro 4.1, utiliza-se uma busca linear inexata para atualizar o vetor de deslocamentos, semelhante à apresentada no Quadro 3.2. Neste caso, porém, a função φ a ser minimizada pela busca linear é igual à energia interna de deformação, W_{int} , assim:

$$\varphi(0) = W_{int}(\mathbf{U}_k) \quad (4.38)$$

$$\varphi(\xi_k) = W_{int}(\mathbf{U}_k + \xi_k \Delta \mathbf{U}_k) \quad (4.39)$$

$$\varphi'(0) = \Delta \mathbf{U}_k^T \nabla W_{int}(\mathbf{U}_k) = \Delta \mathbf{U}_k^T \mathbf{F}_{int}(\mathbf{U}_k) \quad (4.40)$$

4.3. VALIDAÇÃO DA ANÁLISE NÃO-LINEAR COM CONTROLE DE ENERGIA

Para verificar a implementação computacional do modelo constitutivo e da implementação da análise não-linear com o controle de energia, foi utilizado o mesmo exemplo de verificação de Zhao, Ramos Jr. e Paulino (2019). O problema de verificação consiste em um cilindro espesso longo sujeito a uma pressão interna.

A fim de possibilitar a comparação de resultados, foram adotados os mesmos parâmetros utilizados por Zhao, Ramos Jr. e Paulino (2019), apresentados na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 - Parâmetros adotados para o exemplo de validação

Parâmetro	Símbolo	Valor
Módulo de elasticidade (MPa)	E	210000
Coeficiente de Poisson	ν	0,3
Tensão de escoamento em estado de tensão uniaxial (MPa)	σ_y^p	240
Deformação de referência	ϵ_{ref}	0,0001
Raio interno do cilindro (m)	a	0,1
Raio externo do cilindro (m)	b	0,2

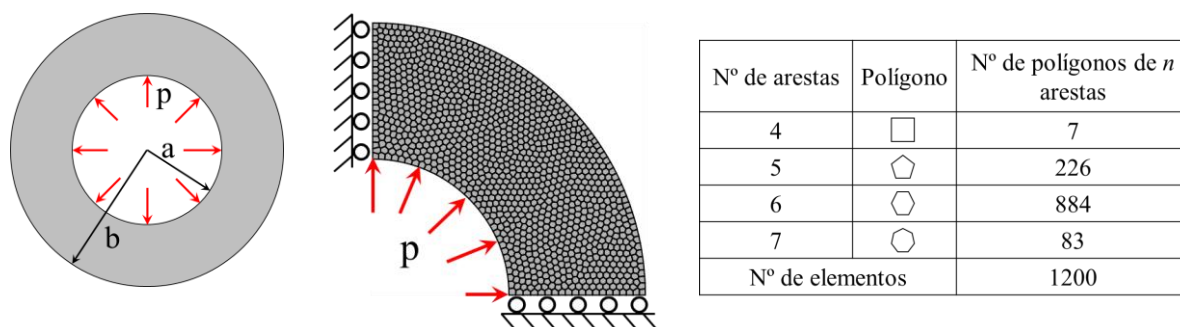
Este problema em que o cilindro é feito com um material elastoplástico perfeito seguindo o critério de von Mises possui solução analítica. Hill (1998) obteve a expressão da pressão interna limite, p_{lim} , que corresponde ao estado em que todo o cilindro se encontra plastificado:

$$p_{lim} = \frac{2\sigma_y^p}{\sqrt{3}} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad (4.41)$$

Substituindo os parâmetros mencionados para este exemplo em (4.41), obtém-se $p_{lim} = 192,0906$ MPa.

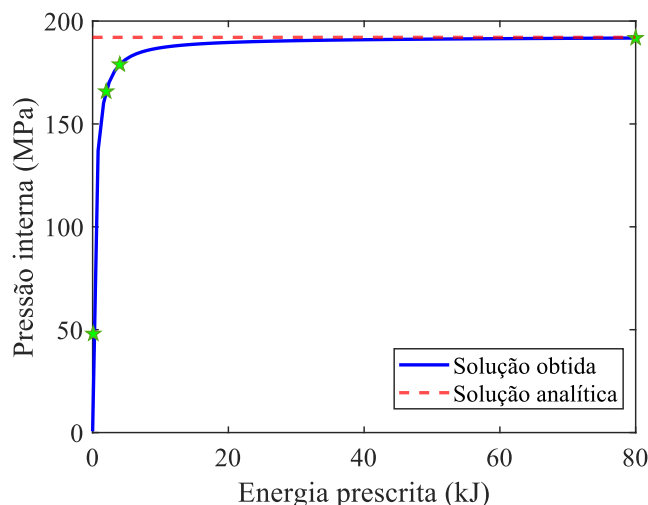
Para simulação numérica do problema, é feita a modelagem de um quarto do cilindro devido à condição de simetria, adotando as condições de contorno apresentadas na Figura 4.4. O domínio foi discretizado em uma malha de 1200 elementos poligonais utilizando o PolyMesher (TALISCHI *et al.*, 2012b).

Figura 4.4 - Exemplo do cilindro pressurizado: geometria, condições de contorno adotadas e dados da malha



Assim como feito por Zhao, Ramos Jr. e Paulino (2019), avalia-se o valor da pressão interna no cilindro para diferentes valores de energia prescrita, C_0 . A Figura 4.5 apresenta o resultado obtido, o qual está de acordo com o apresentado pelos autores do trabalho utilizado como referência, além de mostrar que a solução numérica converge para a solução analítica.

Figura 4.5 - Exemplo do cilindro pressurizado: Pressão interna vs. Energia prescrita



A Tabela 4.2 apresenta os valores numéricos de pressão interna comparando o valor analítico com os da simulação numérica do presente trabalho e de Zhao, Ramos Jr. e Paulino (2019), com $C_0 = 80$ kJ.

Tabela 4.2 - Exemplo cilindro pressurizado: comparação dos valores de p_{lim}

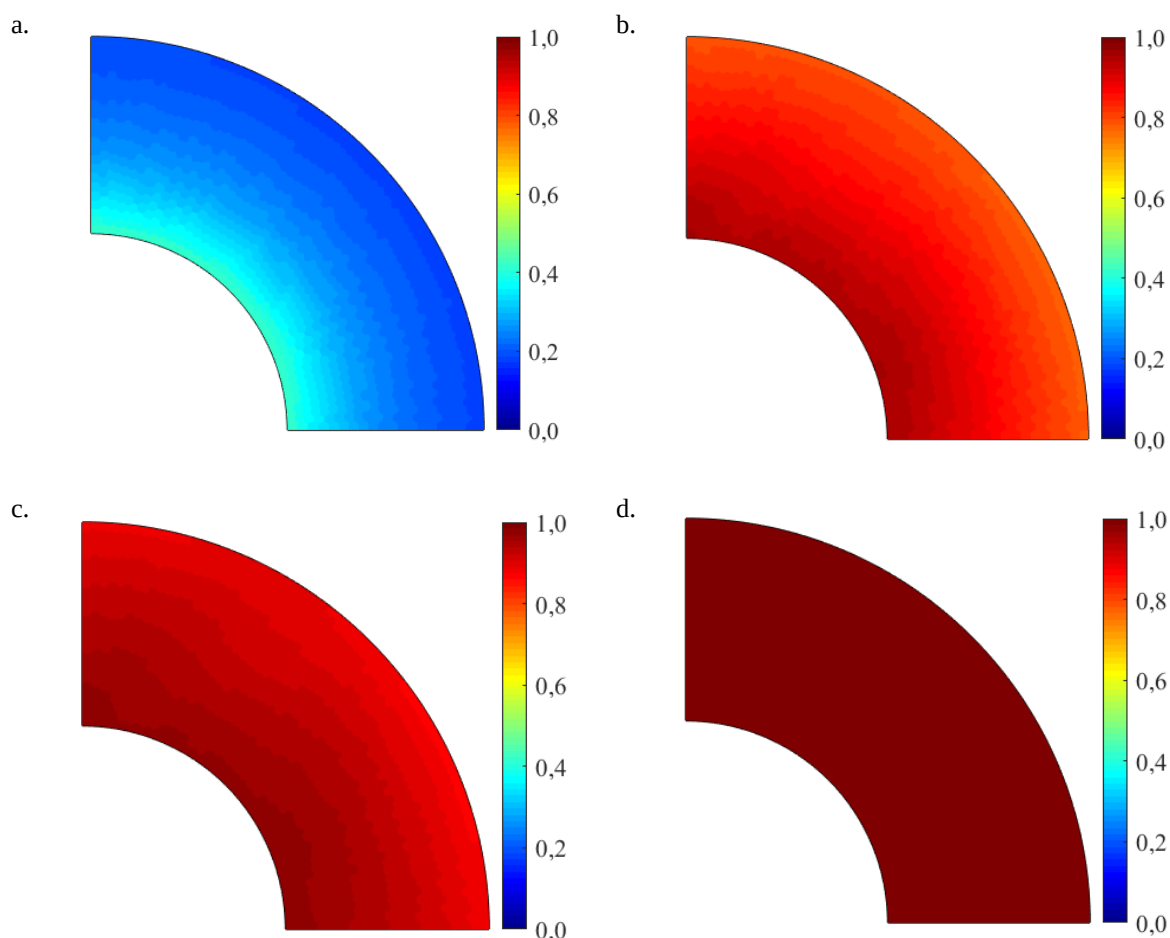
Solução analítica (MPa)	Solução de Zhao, Ramos Jr. e Paulino (2019)	Erro (%)	Solução do presente trabalho	Erro (%)
192,0906	191,5980	-0,26	191,7429	-0,18

O resultado apresentado na Tabela 4.2 mostra uma boa concordância entre a solução numérica e a solução analítica, com um erro de -0,18%. Porém, é interessante avaliar também a distribuição das tensões equivalentes de von Mises, dada pela equação (4.42), no interior do cilindro para diferentes valores de energia prescrita.

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\mathbf{s}\| \quad (4.42)$$

Na Figura 4.6 são apresentados os campos de tensão equivalente de von Mises normalizadas (σ_{VM}/σ_y^p) para diferentes valores de energia prescrita, os quais estão marcados com um símbolo de estrela no gráfico da Figura 4.5.

Figura 4.6 - Tensões de von Mises normalizadas para diferentes valores de energia prescrita: (a) $C_0 = 10^{-3}$ kJ; (b) $C_0 = 2$ kJ; (c) $C_0 = 4$ kJ; (d) $C_0 = 80$ kJ



Para todos os valores de energia prescrita, verifica-se que o modelo respeita o limite de tensão imposto, haja vista que as tensões normalizadas de von Mises são inferiores à unidade. Para um valor de energia prescrita, C_0 , igual a 80 kJ o maior valor de tensão de von Mises normalizada é igual a 0,9988 o que indica que o comportamento idealizado para o modelo constitutivo respeitou o limite de tensão.

4.4. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

Zhao, Ramos Jr. e Paulino (2019) apresentaram duas propostas de formulações para o problema de otimização. A primeira foi de maximização da energia interna de deformação e a segunda a de maximização do fator de carga. Neste trabalho é adotada apenas a primeira proposta, a qual está apresentada em (4.43). O problema de otimização está submetido a uma restrição de volume, por meio da fração prescrita, V_{max} .

Obter: $\mathbf{z}$

Que minimiza: $f(\mathbf{z}) = -W_{int}(\mathbf{z}, \mathbf{U}(\mathbf{z}))$

Tal que: $g(\mathbf{z}) = \frac{\mathbf{A}^T \mathbf{m}_V(\mathbf{P} \mathbf{z})}{\mathbf{A}^T \mathbf{I}} - V_{max} \leq 0$ (4.43)

$$0 < z_{min} \leq z_i \leq z_{max}, \quad i = 1, \dots, N$$

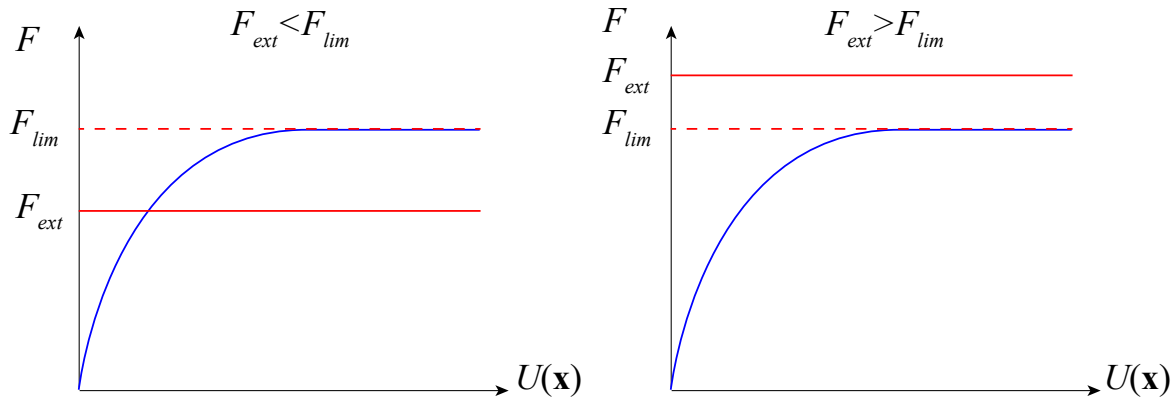
Com: $\mathbf{F}_{int}(\mathbf{z}, \mathbf{U}(\mathbf{z})) = \lambda(\mathbf{z}, \mathbf{U}(\mathbf{z})) \mathbf{F}_{ext}$

$$\mathbf{F}_{ext}^T \mathbf{U}(\mathbf{z}) = 2C_0$$

Na formulação apresentada em (4.43) o fator de carga também é função das variáveis de projeto e do vetor de deslocamentos. Além disso, as equações de equilíbrio estão presentes com a restrição de energia, considerando um valor de energia prescrita, C_0 .

Nesta formulação a solução do sistema de equações de equilíbrio com a restrição de energia por meio de um valor prescrito fornece uma vantagem ao problema de otimização. Como o modelo constitutivo elástico não-linear fornece um valor de limite de tensão, um possível risco é que não se tem é que não se tenha um ponto viável no caminho de equilíbrio para o nível de carregamento fornecido pelo usuário, $\mathbf{F}_{ext}$. A Figura 4.7 apresenta os dois casos que podem ocorrer na etapa de análise estrutural dentro do processo de otimização.

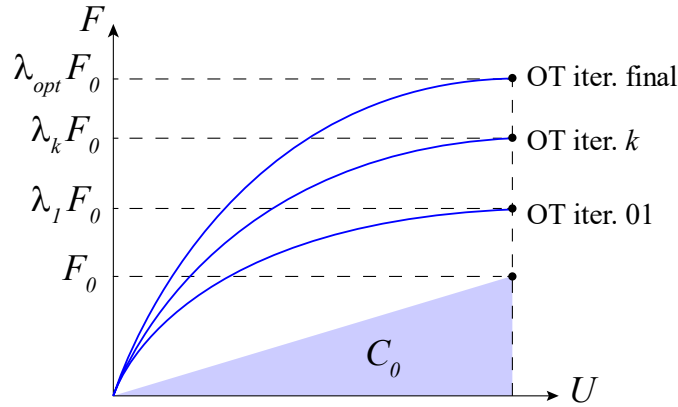
Figura 4.7 - Situações que podem ser obtidas na análise estrutural



Um fator importante para interpretar os casos da Figura 4.7 é que a força limite da estrutura é alterada durante o processo de otimização com a alteração das variáveis de projeto. É necessário, então, garantir que sempre se tenha uma solução viável em equilíbrio para um dado conjunto de variáveis de projeto, ou seja, que o carregamento aplicado seja inferior à carga limite. Contudo, no problema de otimização (4.43), o fator de carga é definido como uma função das variáveis de projeto e do vetor de deslocamentos. Este será determinado pela

equação (4.34), obtida a partir da equação da restrição de energia. Deste modo, garante-se que a carga externa aplicada não irá ultrapassar o valor da carga limite. A Figura 4.8 apresenta uma ilustração exemplificando a variação do fator de carga durante o processo de otimização.

Figura 4.8 - Ilustração do controle de energia para um exemplo de 1 grau de liberdade



Fonte: Adaptado de Zhao, Ramos Jr. e Paulino

No exemplo ilustrado na Figura 4.8 à medida que a rigidez da estrutura aumenta durante o processo de otimização, o fator de carga aplicado aumenta. Neste exemplo, assumiu-se que o fator de carga irá aumentar desde a primeira iteração com base na energia prescrita. Contudo, esta abordagem também permite que ocorra uma diminuição no valor do fator de carga.

Para aplicar algoritmos baseados no gradiente para solução do problema de otimização, faz-se necessário a análise de sensibilidade. A sensibilidade da função objetivo em relação às variáveis de projeto é obtida a partir de (4.44).

$$\frac{\partial f(\mathbf{z}, \mathbf{U})}{\partial E_l} = -\frac{\partial W_{min}(\mathbf{z}, \mathbf{U})}{\partial E_l} - \frac{\partial W_{min}(\mathbf{z}, \mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial E_l} \quad (4.44)$$

Como a derivada da energia interna de deformação em relação ao vetor de deslocamentos é igual ao vetor de forças internas, aplicando a relação de equilíbrio, tem-se:

$$\frac{\partial f(\mathbf{z}, \mathbf{U})}{\partial E_l} = -\frac{\partial W_{int}(\mathbf{z}, \mathbf{U})}{\partial E_l} - \lambda(\mathbf{z}, \mathbf{U}) \mathbf{F}_{ext}^T \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{z})}{\partial E_l} \quad (4.45)$$

A derivada do vetor de deslocamentos em relação ao parâmetro de rigidez E_l pode ser calculada a partir da derivação da equação de restrição de energia.

$$\mathbf{F}_{ext}^T \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{z})}{\partial E_l} = \frac{\partial 2C_0}{\partial E_l} = 0 \quad (4.46)$$

Logo, substituindo (4.46) em (4.45), tem-se (4.47).

$$\frac{\partial f(\mathbf{z}, \mathbf{U})}{\partial E_l} = - \frac{\partial W_{int}(\mathbf{z}, \mathbf{U})}{\partial E_l} \quad (4.47)$$

Dois pontos importantes merecem ser destacados sobre o cálculo da sensibilidade da função objetivo. Primeiro, ela é obtida por meio de uma derivação explícita das variáveis de projeto, e segundo, não há a necessidade de solucionar um problema adjunto para sua definição (ZHAO; RAMOS; PAULINO, 2019).

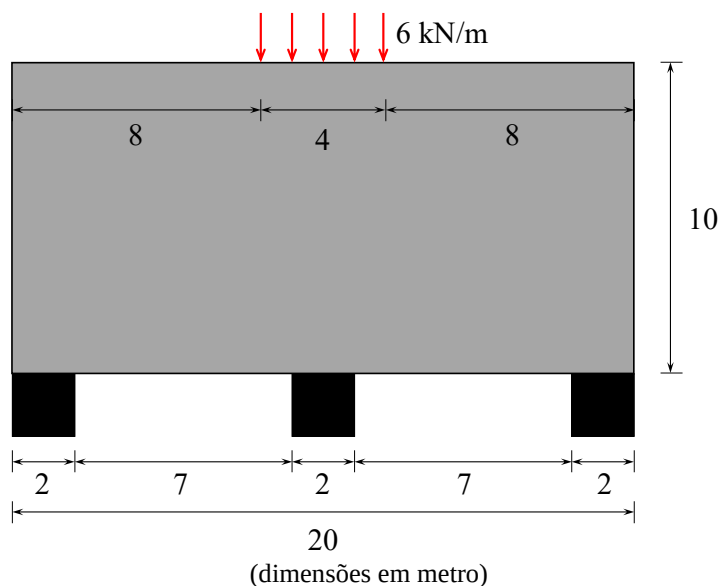
A sensibilidade da restrição de volume é calculada da mesma forma apresentada no item 2.6 para a formulação elástica clássica. Como a sensibilidade da função objetivo é estritamente não-positiva e a sensibilidade da restrição de volume é estritamente não-negativa é possível adotar o OC como esquema de atualização das variáveis de projeto.

4.5. EXEMPLO DE VALIDAÇÃO

Para validar a implementação computacional das modificações feitas na rotina de otimização para o problema de maximização da energia de deformação apresentado no item 4.4, foi reproduzido um dos exemplos apresentados por Zhao, Ramos Jr. e Paulino (2019). O exemplo selecionado consiste numa viga apoiada em três apoios rígidos. A geometria e as condições de contorno do problema são apresentadas na Figura 4.9.

O domínio é discretizado em uma malha regular de 120 x 60 elementos quadrados; o módulo de elasticidade é igual a 3,0e4 kPa; o coeficiente de Poisson é igual a 0,0; a tensão de escoamento em estado de tensão uniaxial, σ_y^p , é igual a 240 kPa; a deformação de referência, ε_{ref} , é igual a 0,0005. Para a otimização, adotou-se uma fração de volume de 30%; o raio do filtro de densidade é igual a 0,4167; a constante de penalização do modelo SIMP é constante e igual a 3; o parâmetro de amortecimento do OC é igual a 0,5; o parâmetro M (limite móvel) do OC é igual a 0,02; a tolerância de convergência do processo de otimização igual a 10^{-4} e o número máximo de iterações do processo de otimização igual a 300.

Figura 4.9 - Exemplo de validação: geometria e condições de contorno



O problema foi solucionado para dois valores de energia prescrita: $C_0 = 10^{-4}$ kJ e $C_0 = 3$ kJ. As soluções obtidas por Zhao, Ramos Jr. e Paulino (2019) são apresentadas na Figura 4.10 e as soluções obtidas no presente trabalho são apresentadas na Figura 4.11. É importante destacar que os parâmetros referentes ao OC, o amortecimento e o limite móvel, não foram informados na referência.

Figura 4.10 – Topologia final e tensões de von Mises normalizadas das soluções obtidas por Zhao, Ramos Jr. e Paulino (2019): (a) $C_0 = 10^{-4}$ kJ; (b) $C_0 = 3$ kJ

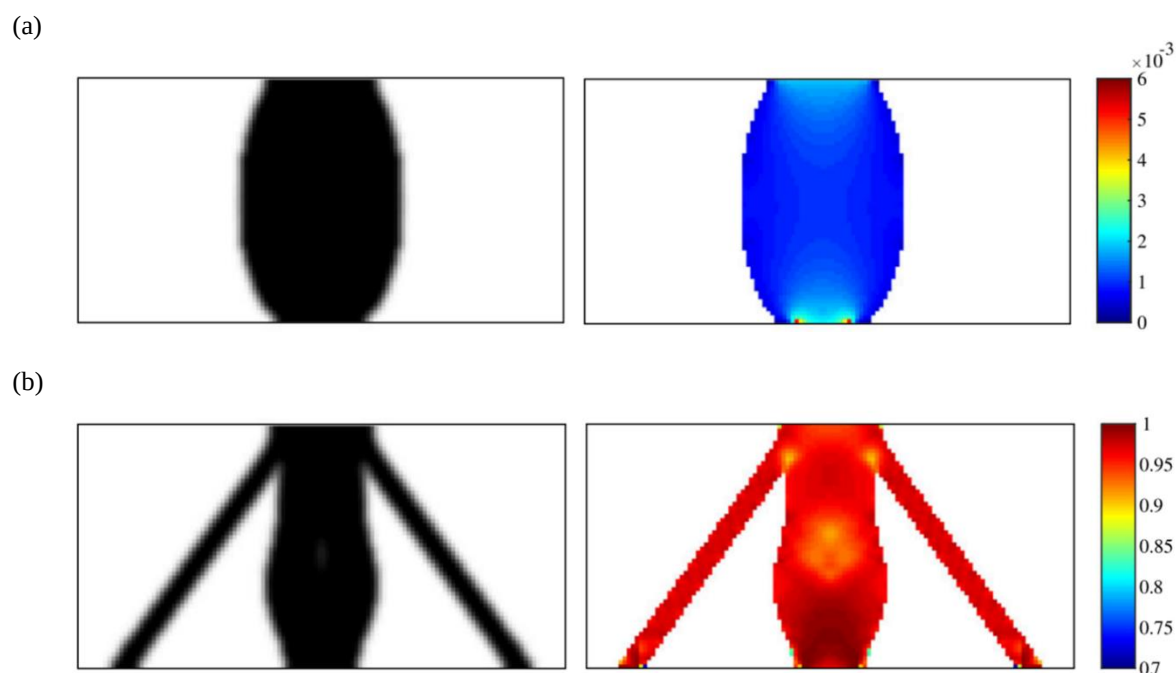
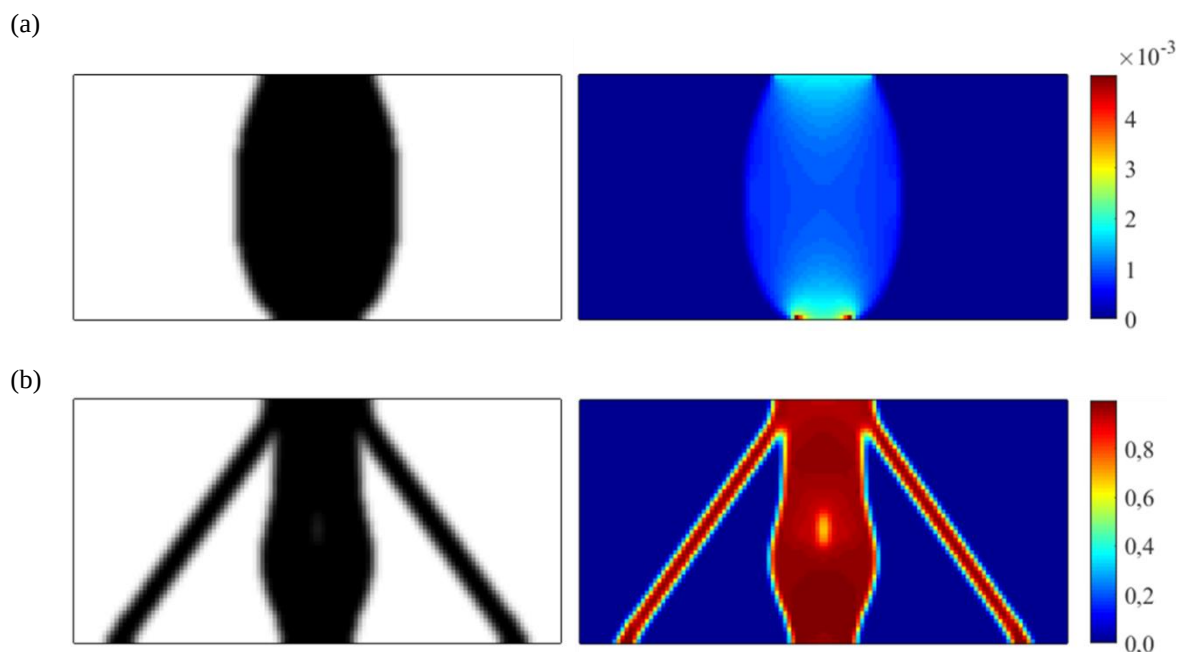


Figura 4.11 - Soluções topológicas e campo de tensões equivalentes de von Mises: (a) $C_0 = 10^{-4}$ kJ; (b) $C_0 = 3$ kJ

Observa-se que foram obtidas topologias similares para os dois valores de energia prescrita considerados.

A solução apresentada na Figura 4.11 (a), obtida com $C_0 = 10^{-4}$ kJ, é semelhante à solução obtida pela formulação elástica, o que é esperado haja vista que pela avaliação do campo de tensões equivalentes de von Mises normalizadas, identifica-se que toda a estrutura está em um nível de tensões praticamente linear. Contudo, para um valor de energia prescrita mais elevado, $C_0 = 3$ kJ, há uma alteração na topologia obtida. Além disso, nota-se que quase toda a estrutura está com tensão próxima da tensão limite.

Por fim, na Tabela 4.3 comparam-se os valores da energia interna de deformação (função objetivo) e do fator de carga obtidos com os da referência.

Tabela 4.3 - Exemplo de validação: comparação dos valores de função objetivo e fator de carga

C_0 (kJ)	W_{int} (kJ)			λ		
	Zhao, Ramos Jr. e Paulino (2019)	Presente trabalho	Erro (%)	Zhao, Ramos Jr. e Paulino (2019)	Presente trabalho	Erro (%)
10^{-4}	3,7057e-6	3,7389e-6	0,90	0,0370	0,0374	1,08
3	242,3085	243,0576	0,31	48,2739	48,5188	0,51

É possível constatar pelos resultados apresentados na Tabela 4.3 uma boa aproximação em relação os resultados do artigo de referência, com o maior valor de erro percentual igual a

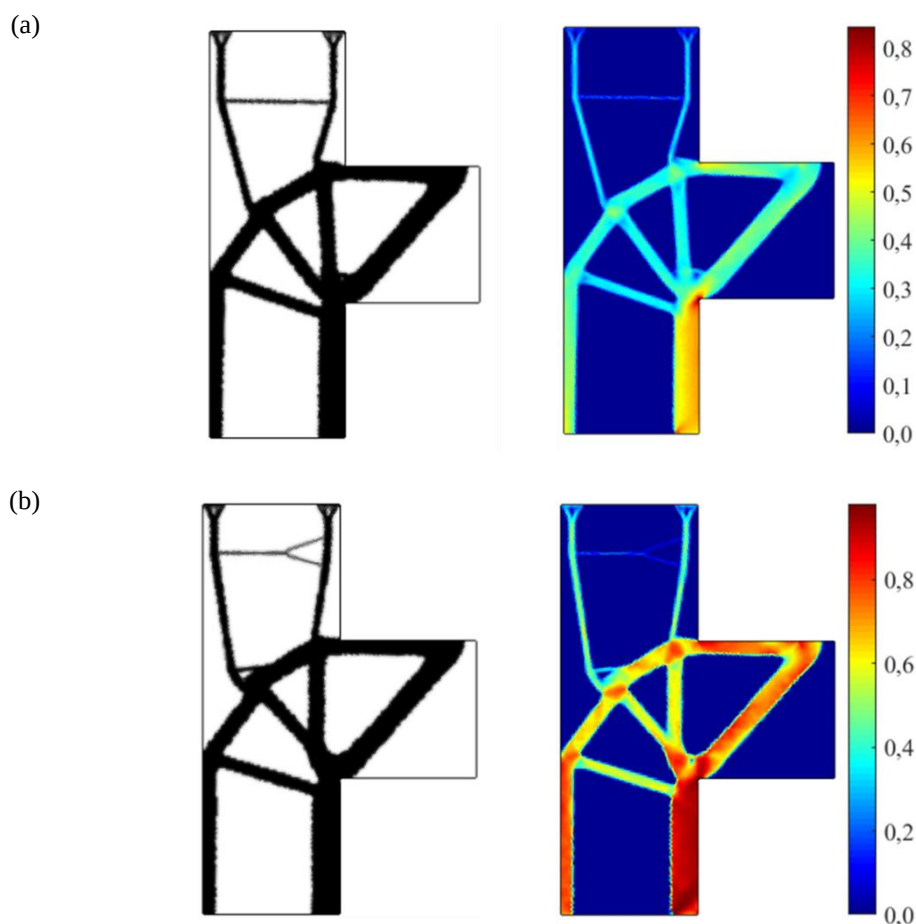
1,08%. De forma geral, observa-se que os valores obtidos no presente trabalho indicam que a estrutura otimizada é mais rígida. Uma possível razão por essa diferença são os valores dos parâmetros do OC, amortecimento e limite móvel. É possível que sejam diferentes dos utilizados nesta análise, já que eles não são apresentados no trabalho referenciado.

4.6. EXEMPLO: NÓ DE PÓRTICO

Este exemplo analisa um nó de pórtico cujas geometria e condições de contorno do consolo são apresentadas na Figura 4.12. O valor da carga vertical, P , é igual a 20 kN/m e da carga horizontal, H , é igual a 10 kN/m.

O domínio é discretizado em uma malha regular de 15000 elementos poligonais; o módulo de elasticidade é igual a 2,0e5 MPa; o coeficiente de Poisson é igual a 0,26; a tensão de escoamento em estado de tensão uniaxial, σ_y^p , é igual a 380 MPa; a deformação de referência, ε_{ref} , é igual a 0,0004. Para a otimização, adotou-se uma fração de volume de 30%; o raio do filtro de densidade é igual a 0,05; a constante de penalização do modelo SIMP é constante e igual a 3; o parâmetro de amortecimento do OC é igual a 0,5; o parâmetro M (limite móvel) do OC é igual a 0,02; a tolerância de convergência do processo de otimização igual a 10^{-4} e o número máximo de iterações do processo de otimização igual a 300

Figura 4.13 - Soluções topológicas e campo de tensões equivalentes de von Mises: (a) $C_0 = 2 \cdot 10^{-6}$ MJ;
(b) $C_0 = 10^{-5}$ MJ



Observa-se que para um valor de energia prescrita mais elevado, a biela de compressão na região do pilar atinge valores de tensão próximos ao valor do limite de tensão imposto aproximadamente pelo modelo constitutivo. Além disso, verifica-se que as regiões de maior concentração de tensão são nas regiões nodais da topologia formada. Em relação à topologia obtida para os dois valores de energia prescrita, é possível identificar uma maior concentração de material na solução com o valor de energia prescrita mais elevado na região do canto inferior do consolo. O motivo é que, nessa região, ocorre uma concentração de tensões, o que promove que essa região atinja valores próximos do limite imposto e exija uma maior quantidade de material.

CAPÍTULO 5

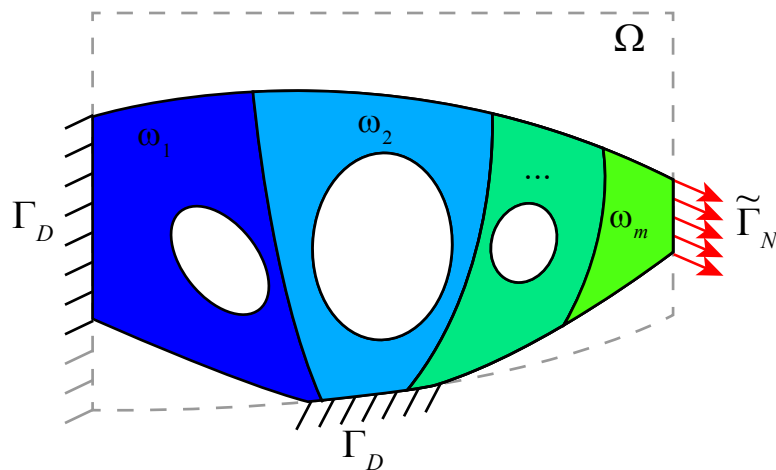
OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA CONSIDERANDO MÚLTIPLOS MATERIAIS E MÚLTIPLAS RESTRIÇÕES DE VOLUME

Este capítulo apresenta a formulação do problema de otimização topológica em um meio contínuo considerando múltiplos materiais e múltiplas restrições de volume. A implementação computacional proposta neste trabalho introduziu alterações na análise estrutural, no cálculo da função objetivo e de sua sensibilidade no código educacional `PolyMat` (SANDERS *et al.*, 2018). São apresentadas aplicações que ilustram a aplicação da formulação implementada.

5.1. DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

No problema de otimização topológica de um meio contínuo com a aplicação de múltiplos materiais procura-se a forma otimizada da estrutura e também a localização otimizada de cada material. Assim, a forma ótima ω é formada pela união de um número finito de partes compostas por até m diferentes materiais, conforme definido na equação (5.1) e ilustrado na Figura 5.1.

Figura 5.1 - Domínio estendido e condições de contorno



Fonte: Inspirado em Sanders *et al.* (2018)

$$\omega = \bigcup_{i=1}^m \omega_i, \text{ com } \omega_i \cap \omega_j = \emptyset, \forall i \neq j \quad (5.1)$$

Com base nisso, o problema de otimização de maximização da energia potencial total estacionária, escrito em sua forma discreta, é apresentado em (5.2).

$$\begin{aligned}
 \text{Obter:} \quad & \mathbf{Z} = \{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m\} \\
 \text{Que minimiza:} \quad & f(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m, \mathbf{U}) = -\Pi_{\min}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m, \mathbf{U}) \\
 \text{Tal que:} \quad & g_j(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m) = \frac{\sum_{i \in \mathcal{G}_j} \sum_{l \in \mathcal{E}_j} A_l m_V(y_i^{(l)})}{\sum_{l \in \mathcal{E}_j} A_l} - V_{\max}^j \leq 0, \quad j = 1, \dots, nc \\
 & 0 \leq z_i^{(e)} \leq 1, \quad i = 1, \dots, m \quad \text{e} \quad e = 1, \dots, N \\
 \text{Com:} \quad & \mathbf{U}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m) = \arg \min_{\mathbf{U}} \Pi(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m, \mathbf{U})
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

E o problema de maximização da energia interna de deformação é apresentado em (5.3).

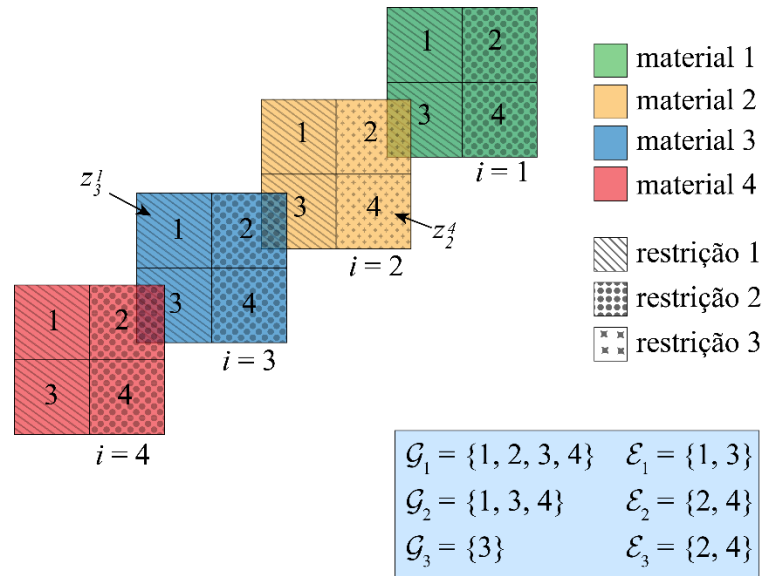
$$\begin{aligned}
 \text{Obter:} \quad & \mathbf{Z} = \{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m\} \\
 \text{Que minimiza:} \quad & f(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m, \mathbf{U}) = -W_{\text{int}}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m, \mathbf{U}) \\
 \text{Tal que:} \quad & g_j(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m) = \frac{\sum_{i \in \mathcal{G}_j} \sum_{l \in \mathcal{E}_j} A_l m_V(y_i^{(l)})}{\sum_{l \in \mathcal{E}_j} A_l} - V_{\max}^j \leq 0, \quad j = 1, \dots, nc \\
 & 0 \leq z_i^{(e)} \leq 1, \quad i = 1, \dots, m \quad \text{e} \quad e = 1, \dots, N \\
 \text{Com:} \quad & \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m, \mathbf{U}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m)) = \lambda(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m, \mathbf{U}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m)) \mathbf{F}_{\text{ext}} \\
 & \mathbf{F}_{\text{ext}}^T \mathbf{U}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m) = 2 C_0
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Onde, $\mathbf{Z}$ é a matriz de variáveis de projeto; $\mathbf{z}_i$ é o vetor de variáveis de projeto associadas ao material i ; f é a função objetivo; $\Pi_{\min}$ é a energia potencial total estacionária; W_{int} é a energia interna de deformação; $\mathbf{U}$ corresponde ao vetor de deslocamentos nodais; g_j corresponde à restrição de volume j ; $\mathcal{G}_j$ conjunto de materiais associados à restrição j ; $\mathcal{E}_j$ conjunto de índices dos elementos associados à restrição j ; A_l é a área do elemento contínuo l ; m_V é a função de interpolação do volume do elemento com base na densidade de material; $y_i^{(l)}$ densidade de material i do elemento l ; $V_{\max}^j$ é a fração de volume prescrita associada à restrição j ; nc é o número de restrições de volume do problema de otimização; $z_i^{(e)}$ é a variável de projeto do elemento e associada ao material i ; m é número de materiais candidatos; $\mathbf{F}_{\text{int}}$ é o vetor de forças internas nodais; $\mathbf{F}_{\text{ext}}$ é o vetor de forças externas nodais; λ é fator de carga; e C_0 é a energia prescrita.

O problema de otimização de maximização da energia interna de deformação, definido em (5.3), é adotado quando algum material candidato é definido por um modelo constitutivo com limite de tensão. Caso contrário, o problema de otimização adotado é o de maximização da energia potencial total estacionária, definido em (5.2).

Nos problemas definidos em (5.2) e (5.3), a restrição de volume única do problema (2.22) desdobra-se em várias restrições, que podem versar sobre combinações específicas de parte dos materiais em sub-regiões específicas do domínio. A Figura 5.2 apresenta uma ilustração para auxiliar o entendimento da definição dos conjuntos $\mathcal{G}_j$ e $\mathcal{E}_j$ associados a cada uma das restrições j . Note que as restrições de volume podem ser definidas em apenas uma sub-região do domínio estendido.

Figura 5.2 - Ilustração da especificação dos materiais e das restrições de volume para uma malha de 2 x 2 elementos com 4 materiais candidatos e 3 restrições



Fonte: Adaptado de Sanders *et al.* (2018)

As densidades dos elementos associados a cada material i ($\mathbf{y}_i$) podem ser obtidas por meio da aplicação do filtro de regularização (de densidade), da mesma forma apresentada anteriormente em (2.31), conforme indicado em (5.4).

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{P} \mathbf{z}_i \quad (5.4)$$

Além disso, da mesma forma que é feita para as variáveis de projeto, os valores de densidade dos elementos são armazenados em uma matriz $\mathbf{Y} = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m\}$, composta pela distribuição, $\mathbf{y}_i$, de cada material i .

5.1.1. Penalização da mistura de materiais

A penalização das densidades intermediárias continua sendo feita utilizando as funções de interpolação $m_E(y_i^{(l)})$ apresentadas em (2.21). Contudo, no caso do problema considerando múltiplos materiais, é necessário também penalizar a mistura de materiais em um mesmo elemento, a fim de que a solução apresente apenas um material por elemento. Quando as formulações dos problemas de otimização topológica em (5.2) e (5.3) são aplicadas a um problema considerando múltiplos materiais com comportamento elástico linear, que é o caso do trabalho de Sanders *et al.* (2018), a penalização da mistura de materiais é realizada usando uma função de interpolação proveniente do método DMO (do inglês *Discrete Material Interpolation*), proposto por Stegmann e Lund (2005) no contexto da otimização de orientação de fibras. A interpolação das propriedades dos materiais, apresentada da equação (5.5), é realizada por meio de uma soma ponderada, onde w_{ek} , definido em (5.6), consiste nos pesos, os quais penalizam a mistura de materiais. O parâmetro γ em (5.6) foi introduzido por Sanders *et al.* (2018) com o intuito de possibilitar a realização de um esquema de continuação.

$$\mathbf{D}_p^{(e)}(z_1^{(e)}, \dots, z_m^{(e)}) = \sum_{k=1}^m w_{ek}(z_1^{(e)}, \dots, z_m^{(e)}) \mathbf{D}_k^{(e)} \quad (5.5)$$

$$w_{ek}(z_1^{(e)}, \dots, z_m^{(e)}) = m_E(y_k^{(e)}) \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq k}}^m \left[1 - \gamma m_E(y_r^{(e)}) \right] \quad (5.6)$$

Onde, $\mathbf{D}_p^{(e)}$ é o tensor constitutivo elástico interpolado do elemento e , $\mathbf{D}_k^{(e)}$ é o tensor constitutivo elástico do elemento e associada ao material k ; $y_r^{(e)}$ é a densidade do elemento e associada ao material r .

Em problemas de otimização topológica que consideram múltiplos materiais com comportamento elástico não-linear, é necessária uma adaptação no uso da função de penalização da mistura de materiais, pois o comportamento mecânico do material não pode ser mais caracterizado por um único parâmetro, o módulo de elasticidade. Devido a essa necessidade de um novo esquema de interpolação dos materiais, Zhang, Chi e Paulino (2020) e Zhang e Chi (2020) apresentaram a proposta de calcular a energia interna de deformação específica interpolada em cada elemento:

$$\Psi_{\rho}^{(e)}\left(z_1^{(e)}, \dots, z_m^{(e)}, \mathbf{u}_e\right) = \sum_{k=1}^m w_{ek} \left(z_1^{(e)}, \dots, z_m^{(e)}\right) \Psi_k^{(e)}\left(\mathbf{u}_e\right) \quad (5.7)$$

Onde, $\Psi_{\rho}^{(e)}$ é a energia de deformação específica interpolada associada ao elemento e ; $\Psi_k^{(e)}$ é a energia de deformação específica do elemento e associada ao material k ; $\mathbf{u}_e$ é o vetor de deslocamentos nodais associado ao elemento e .

A proposta de Zhang, Chi e Paulino (2020) e de Zhang e Chi (2020) baseia-se no DMO, uma vez que os pesos da soma ponderada w_{ek} continuam sendo definidos por (5.6). Um aspecto interessante desta abordagem é que ela permite o uso de materiais com comportamento elástico não-linear definidos por diferentes funções de energia interna de deformação específica, o que abrange os materiais hiperelásticos, bilineares, etc. Em contrapartida, ela exige que sejam definidas, para um mesmo elemento, variáveis de projeto associadas a cada um dos m materiais.

É possível ainda mostrar que caso todos os materiais candidatos sejam elásticos lineares, o esquema se reduz ao esquema de interpolação DMO original (ZHANG; CHI; PAULINO, 2020). Para tanto, define-se a energia interna específica, $\Psi_k^{(e)}$, de um elemento e com material elástico linear k como:

$$\Psi_k^{(e)}\left(\mathbf{u}_e\right) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_e\left(\mathbf{u}_e\right)^T \mathbf{D}_k \boldsymbol{\varepsilon}_e\left(\mathbf{u}_e\right) \quad (5.8)$$

Onde, $\mathbf{D}_k$ é tensor constitutivo elástico do material k ; e $\boldsymbol{\varepsilon}_e$ é o vetor com as componentes de deformação do elemento e .

Portanto, substituindo (5.8) em (5.7), chega-se a:

$$\begin{aligned} \Psi_{\rho}^{(e)}\left(z_1^{(e)}, \dots, z_m^{(e)}, \mathbf{u}_e\right) &= \sum_{k=1}^m w_{ek} \left(z_1^{(e)}, \dots, z_m^{(e)}\right) \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_e\left(\mathbf{u}_e\right)^T \mathbf{D}_k \boldsymbol{\varepsilon}_e\left(\mathbf{u}_e\right) \\ \Psi_{\rho}^{(e)}\left(z_1^{(e)}, \dots, z_m^{(e)}, \mathbf{u}_e\right) &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_e\left(\mathbf{u}_e\right)^T \left\{ \sum_{k=1}^m w_{ek} \left(z_1^{(e)}, \dots, z_m^{(e)}\right) \mathbf{D}_k \right\} \boldsymbol{\varepsilon}_e\left(\mathbf{u}_e\right) \\ \Psi_{\rho}^{(e)}\left(z_1^{(e)}, \dots, z_m^{(e)}, \mathbf{u}_e\right) &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_e\left(\mathbf{u}_e\right)^T \mathbf{D}_{\rho} \boldsymbol{\varepsilon}_e\left(\mathbf{u}_e\right) \end{aligned} \quad (5.9)$$

Sendo $\mathbf{D}_{\rho}$ o tensor constitutivo elástico interpolado que é obtido pelo uso da versão original do esquema de interpolação DMO.

5.1.2. Análise de sensibilidade

Com a função de energia de deformação específica interpolada conforme a equação (5.7), a energia interna de deformação é calculada conforme a equação (5.10), e o potencial de energia total é calculado conforme a equação (5.11).

$$W_{int}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m, \mathbf{U}) = \sum_{e=1}^N \int_{\Omega_e} \Psi_{\rho}^{(e)}(\mathbf{z}_1^{(e)}, \dots, \mathbf{z}_m^{(e)}, \mathbf{u}_e, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (5.10)$$

$$\Pi(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m, \mathbf{U}) = \sum_{e=1}^N \int_{\Omega_e} \Psi_{\rho}^{(e)}(\mathbf{z}_1^{(e)}, \dots, \mathbf{z}_m^{(e)}, \mathbf{u}_e, \mathbf{x}) d\mathbf{x} - \mathbf{F}_{ext} \cdot \mathbf{U} \quad (5.11)$$

Onde, $\mathbf{x}$ é o vetor posição no interior do elemento e ; $\mathbf{F}_{ext}$ é o vetor de forças externas; e $\mathbf{U}$ é o vetor de deslocamentos nodais da estrutura.

A sensibilidade da função objetivo é calculada pela regra da cadeia:

$$\frac{\partial f(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m, \mathbf{U})}{\partial \mathbf{z}_i^{(l)}} = \sum_{e=1}^N \frac{\partial f(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m, \mathbf{U})}{\partial y_i^{(e)}} \frac{\partial y_i^{(e)}}{\partial \mathbf{z}_i^{(l)}} \quad (5.12)$$

Considerando a equação (5.4), tem-se que:

$$\frac{\partial y_i^{(e)}}{\partial \mathbf{z}_i^{(l)}} = P_{el} \quad (5.13)$$

A derivada da função objetivo em relação à variável $y_i^{(e)}$ é:

$$\frac{\partial f(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m, \mathbf{U})}{\partial y_i^{(e)}} = \frac{\partial f(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m, \mathbf{U})}{\partial E_i^{(e)}} \frac{\partial E_i^{(e)}}{\partial y_i^{(e)}} + \frac{\partial f(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m, \mathbf{U})}{\partial V_i^{(e)}} \frac{\partial V_i^{(e)}}{\partial y_i^{(e)}} \quad (5.14)$$

Onde:

$$E_i^{(e)} = m_E(y_i^{(e)}) \quad (5.15)$$

$$V_i^{(e)} = m_V(y_i^{(e)}) \quad (5.16)$$

Sendo, m_E e m_V as funções de interpolação da densidade do elemento e associada ao material i para obtenção do parâmetro de rigidez e do volume de material no elemento, respectivamente.

Nos problemas de otimização definidos em (5.2) e (5.3), as funções objetivo não possuem dependência direta das variáveis de projeto por meio da fração de volume de material nos elementos ($V_i^{(e)}$), por isso, tem-se:

$$\frac{\partial f}{\partial V_i^{(e)}} = 0 \quad (5.17)$$

A derivada em relação ao parâmetro de rigidez é:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m, \mathbf{U})}{\partial E_i^{(e)}} &= \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m, \mathbf{U})}{\partial w_{ej}(\mathbf{z}_1^{(e)}, \dots, \mathbf{z}_m^{(e)})} \frac{\partial w_{ej}(\mathbf{z}_1^{(e)}, \dots, \mathbf{z}_m^{(e)})}{\partial E_i^{(e)}} \\ &+ \frac{\partial f(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m, \mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial E_i^{(e)}} \end{aligned} \quad (5.18)$$

A função objetivo do problema (5.2) é o potencial de energia total estacionária, logo, sua derivada em relação ao vetor de deslocamentos é nula devido à condição de equilíbrio. A função objetivo do problema (5.3) é a energia interna de deformação, e foi demonstrado no item 4.4 que sua derivada em relação ao vetor de deslocamentos se anula devido a consideração da relação de equilíbrio com a imposição da restrição de energia. Portanto, tem-se:

$$\frac{\partial f(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m, \mathbf{U})}{\partial E_i^{(e)}} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m, \mathbf{U})}{\partial w_{ej}(\mathbf{z}_1^{(e)}, \dots, \mathbf{z}_m^{(e)})} \frac{\partial w_{ej}(\mathbf{z}_1^{(e)}, \dots, \mathbf{z}_m^{(e)})}{\partial E_i^{(e)}} \quad (5.19)$$

Onde, para o problema de otimização (5.2) chega-se a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial w_{ej}} &= - \frac{\partial \Pi_{min}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m, \mathbf{U})}{\partial w_{ej}(\mathbf{z}_1^{(e)}, \dots, \mathbf{z}_m^{(e)})} \\ &= - \frac{\partial}{\partial w_{ej}(\mathbf{z}_1^{(e)}, \dots, \mathbf{z}_m^{(e)})} \left[\sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^m w_{lk}(\mathbf{z}_1^{(l)}, \dots, \mathbf{z}_m^{(l)}) \int_{\Omega_l} \Psi_k^{(l)}(\mathbf{u}_l) d\Omega_l - \mathbf{F}_{ext} \cdot \mathbf{U} \right] \\ &= - \int_{\Omega_e} \Psi_j^{(e)}(\mathbf{u}_e) d\Omega_e \end{aligned} \quad (5.20)$$

E para o problema (5.3), chega-se a:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial w_{ej}} &= - \frac{\partial W_{int}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m, \mathbf{U})}{\partial w_{ej}(\mathbf{z}_1^{(e)}, \dots, \mathbf{z}_m^{(e)})} \\
 &= - \frac{\partial}{\partial w_{ej}(\mathbf{z}_1^{(e)}, \dots, \mathbf{z}_m^{(e)})} \left[\sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^m w_{lk}(\mathbf{z}_1^{(l)}, \dots, \mathbf{z}_m^{(l)}) \int_{\Omega_l} \Psi_k^{(l)}(\mathbf{u}_l) d\Omega_l \right] \\
 &= - \int_{\Omega_e} \Psi_j^{(e)}(\mathbf{u}_e) d\Omega_e
 \end{aligned} \tag{5.21}$$

E, para ambos os problemas, vale:

$$\frac{\partial w_{ej}(\mathbf{z}_1^{(e)}, \dots, \mathbf{z}_m^{(e)})}{\partial E_i^{(e)}} = \begin{cases} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^m (1 - m_E(y_k^{(e)})) & , \text{ para } i = j \\ -m_E(y_j^{(e)}) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i, j}}^m (1 - m_E(y_k^{(e)})) & , \text{ para } i \neq j \end{cases} \tag{5.22}$$

Por fim, a sensibilidade da função objetivo pode ser escrita na forma vetorial:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{z}_i^{(l)}} = \sum_{e=1}^N P_{el} \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial w_{ej}} \frac{\partial w_{ej}}{\partial E_i^{(e)}} \right) \frac{\partial E_i^{(e)}}{\partial y_i^{(e)}} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial \mathbf{z}_i} = \mathbf{P}^T \frac{\partial f}{\partial \mathbf{E}_i} \frac{\partial \mathbf{E}_i}{\partial \mathbf{y}_i} \tag{5.23}$$

É importante ressaltar que a sensibilidade da função objetivo não é estritamente não-positiva, devido à derivada (5.22). Essa derivada torna-se positiva em regiões que ocorrem mistura de materiais (SANDERS; AGUILÓ; PAULINO, 2018).

A sensibilidade da restrição de volume j é:

$$\frac{\partial g_j}{\partial \mathbf{z}_i} = \frac{\partial g_j}{\partial \mathbf{E}_i} \frac{\partial \mathbf{E}_i}{\partial \mathbf{y}_i} \frac{\partial \mathbf{y}_i}{\partial \mathbf{z}_i} + \frac{\partial g_j}{\partial \mathbf{V}_i} \frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial \mathbf{y}_i} \frac{\partial \mathbf{y}_i}{\partial \mathbf{z}_i} \tag{5.24}$$

De modo que:

$$\frac{\partial g_j}{\partial E_i^{(l)}} = 0 \tag{5.25}$$

$$\frac{\partial g_j}{\partial V_i^{(l)}} = \frac{A_l}{\sum_{l \in \mathcal{E}_j} A_l} \quad (5.26)$$

5.1.3. Equações de equilíbrio

Inicialmente, apresenta-se a obtenção das equações de equilíbrio sem a consideração da restrição de energia indicada no problema (5.3). Essas são obtidas a partir da minimização do potencial de energia total do sistema em relação ao vetor de deslocamentos, $\mathbf{U}$. Porém, utiliza-se a regularização de Tikhonov no potencial de energia, apresentado na equação (5.27), a fim de evitar que a matriz de rigidez da estrutura torne-se singular. A regularização da Tikhonov foi utilizada neste mesmo contexto no trabalho de Sanders, Pereira e Paulino (2021).

$$\Pi_{reg}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m, \mathbf{U}) = \sum_{e=1}^N \int_{\Omega_e} \Psi_\rho^{(e)}(z_1^{(e)}, \dots, z_m^{(e)}, \mathbf{u}_e, \mathbf{x}) d\mathbf{x} - \mathbf{F}_{ext} \cdot \mathbf{U} + \frac{\eta}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{U} \quad (5.27)$$

Onde η corresponde ao parâmetro positivo de regularização de Tikhonov e é determinado conforme a equação (5.28).

$$\eta = \frac{\eta_0}{N_{GL}} \text{tr}(\mathbf{K}_{t,0}) \quad (5.28)$$

Sendo η_0 um valor pequeno, geralmente adotado igual a 10^{-8} e N_{GL} corresponde ao número de graus de liberdade.

A minimização do potencial de energia total regularizado, definido em (5.27), em relação ao vetor de deslocamentos $\mathbf{U}$, fornece:

$$\frac{\partial \Pi_{reg}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m, \mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} = \mathbf{0} \rightarrow \sum_{e=1}^N \int_{\Omega_e} \frac{\partial \Psi_\rho^{(e)}(z_1^{(e)}, \dots, z_m^{(e)}, \mathbf{u}_e, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{u}_e} d\mathbf{x} - \mathbf{F}_{ext} + \eta \mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (5.29)$$

A primeira parcela do lado esquerdo da segunda equação, em (5.29), corresponde ao vetor de forças internas. Para defini-lo, é preciso calcular derivada da energia de deformação específica interpolada, (5.7), em relação ao vetor de deslocamentos associado ao elemento e conforme:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Psi_p^{(e)}(z_1^{(e)}, \dots, z_m^{(e)}, \mathbf{u}_e, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{u}_e} &= \frac{\partial \Psi_p^{(e)}(z_1^{(e)}, \dots, z_m^{(e)}, \mathbf{u}_e, \mathbf{x})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_e(\mathbf{u}_e, \mathbf{x})} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_e(\mathbf{u}_e, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{u}_e} \\
&= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_e(\mathbf{u}_e, \mathbf{x})} \left[\sum_{k=1}^m w_{ek} \left(z_1^{(e)}, \dots, z_m^{(e)} \right) \Psi_k^{(e)}(\mathbf{u}_e, \mathbf{x}) \right] \cdot \mathbf{B}_e(\mathbf{x}) \\
&= \left[\sum_{k=1}^m w_{ek} \left(z_1^{(e)}, \dots, z_m^{(e)} \right) \boldsymbol{\sigma}_k^{(e)}(\mathbf{u}_e, \mathbf{x}) \right] \cdot \mathbf{B}_e(\mathbf{x})
\end{aligned} \tag{5.30}$$

Onde, $\boldsymbol{\varepsilon}_e$ é o vetor de deformações do elemento e ; $\mathbf{B}_e$ é a matriz de compatibilidade cinemática do elemento e ; $\boldsymbol{\sigma}_k^{(e)}$ é o vetor de tensões de Cauchy do elemento e associado ao material k ; e $\mathbf{x}$ é o vetor posição no interior do elemento e .

Assim, o vetor de forças internas, $\mathbf{F}_{int}$, pode ser definido como:

$$\mathbf{F}_{int}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m, \mathbf{U}) = \sum_{e=1}^N \left\{ \sum_{k=1}^m w_{ek} \left(z_1^{(e)}, \dots, z_m^{(e)} \right) \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_e(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\sigma}_k^{(e)}(\mathbf{u}_e, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \right\} \tag{5.31}$$

Por fim, para solucionar o sistema de equações utilizando o método de Newton-Raphson, é preciso linearizar a equação de equilíbrio (5.29):

$$\mathbf{F}_{int}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m, \mathbf{U}_k) - \mathbf{F}_{ext} + \eta \mathbf{U}_k + \left[\frac{\partial \mathbf{F}_{int}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m, \mathbf{U}_k)}{\partial \mathbf{U}} + \eta \mathbf{I} \right] \Delta \mathbf{U}_k = \mathbf{0} \tag{5.32}$$

Sendo, $\mathbf{I}$ a matriz identidade e $\Delta \mathbf{U}_k$ o incremento do vetor de deslocamento na iteração k do método de Newton-Raphson.

A equação (5.32) pode ser escrita na forma compacta a seguir:

$$\mathbf{K}_{t,reg}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m, \mathbf{U}_k) \Delta \mathbf{U}_k = -\mathbf{R}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m, \mathbf{U}_k) \tag{5.33}$$

Onde, $\mathbf{K}_{t,reg}$ é a matriz de rigidez tangente da estrutura com a regularização de Tikhonov expressa em (5.34):

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{t,reg}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m, \mathbf{U}) &= \frac{\partial \mathbf{F}_{int}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m, \mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} + \eta \mathbf{I} \\
&= \sum_{e=1}^N \left\{ \sum_{k=1}^m w_{ek} \left(z_1^{(e)}, \dots, z_m^{(e)} \right) \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_e(\mathbf{x})^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_k^{(e)}(\mathbf{u}_e, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{u}_e} d\mathbf{x} \right\} + \eta \mathbf{I} \\
&= \sum_{e=1}^N \left\{ \sum_{k=1}^m w_{ek} \left(z_1^{(e)}, \dots, z_m^{(e)} \right) \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_e(\mathbf{x})^T \mathbf{D}_k(\mathbf{u}_e, \mathbf{x}) \mathbf{B}_e(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right\} + \eta \mathbf{I} \\
&= \mathbf{K}_{t,0}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m, \mathbf{U}) + \eta \mathbf{I}
\end{aligned} \tag{5.34}$$

O vetor de forças residuais, $\mathbf{R}$, dado por:

$$\mathbf{R}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m, \mathbf{U}_k) = \mathbf{F}_{int}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m, \mathbf{U}_k) - \mathbf{F}_{ext} \tag{5.35}$$

Na dedução apresentada, o termo $\eta \mathbf{U}_k$ em (5.32) foi desprezado, pois se deseja obter o vetor de deslocamentos que atenda a condição de equilíbrio, que equivale a anular o resíduo, $\mathbf{R}$. Além disso, o valor de η é pequeno.

Por fim, caso seja adotado o problema de otimização (5.3), a relação de equilíbrio é definida em (5.36).

$$\begin{cases} \mathbf{F}_{int}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m, \mathbf{U}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m)) = \lambda(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m, \mathbf{U}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m)) \mathbf{F}_{ext} \\ \mathbf{F}_{ext}^T \mathbf{U}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m) = 2 C_0 \end{cases} \tag{5.36}$$

O vetor de forças internas nodais, $\mathbf{F}_{int}$, da primeira equação de (5.36), é calculado conforme indicado na equação (5.31).

5.2. ESQUEMA DE ATUALIZAÇÃO ZPR COM SEPARAÇÃO DE SENSIBILIDADE

O esquema de atualização das variáveis de projeto é baseado no critério de otimalidade do problema de otimização, o qual é amplamente utilizado pela comunidade de otimização topológica, o OC. Trata-se de um esquema adaptado e altamente eficiente para problemas auto-adjuntos com uma única restrição de volume, e é apresentado em detalhes no Apêndice A deste trabalho. Os problemas de otimização apresentados nos Capítulos 3 e 4 foram solucionados por ele, conforme mencionado anteriormente.

Uma alternativa para problemas com múltiplas restrições de volume é a adoção do Método das Assíntotas Móveis (MMA) (SVANBERG, 1987). O MMA é um método de programação não-linear no qual é feita uma aproximação convexa do problema para o solucionar de forma iterativa. Contudo, ele é formulado para problemas de otimização estrutural genéricos, nos quais as restrições também podem ser não-lineares, solucionando o problema de uma forma totalmente acoplada (ZHANG; CHI, 2020).

Zhang, Paulino e Ramos Jr. (2018b) apresentaram a proposta de um esquema de atualização eficiente e adaptado para problemas de otimização auto-adjuntos submetidos à múltiplas restrições lineares, denominado ZPR (pronuncia-se zíper). Foi proposto no contexto do Método da *Ground Structure* e considera materiais com comportamento elástico não-linear. Sanders, Aguiló e Paulino (2018) e Sanders *et al.* (2018) aplicaram o ZPR como esquema de atualização para problemas de otimização topológica com múltiplos materiais e múltiplas restrições de volume utilizando a abordagem do Método da Densidade, similar aos problemas (5.2) e (5.3). Nesses trabalhos, a sensibilidade da função objetivo também não é estritamente não-positiva, porém os autores desprezam a informação dessas sensibilidades, substituindo seus valores por zero.

Giraldo-Londoño *et al.* (2020) apresentaram uma adaptação da versão original do ZPR a fim de obter um esquema de atualização de variáveis de projeto eficiente que possa ser aplicado a problemas de otimização topológica sem a restrição de que a sensibilidade da função objetivo seja estritamente não-positiva. Para isso, os autores utilizaram o conceito de separação de sensibilidade apresentado por Jiang, Ramos Jr. e Paulino (2021)² *apud* Giraldo-Londoño e Paulino (2020). A função objetivo é linearizada de forma que as componentes positivas e negativas da sensibilidade da mesma são tratadas de forma separada:

$$\bar{f}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m) = f(\mathbf{z}_1^k, \dots, \mathbf{z}_m^k) + \sum_{i=1}^m \left\{ \mathbf{a}_i^T [\bar{\mathbf{z}}_i(\mathbf{z}_i) - \bar{\mathbf{z}}_i(\mathbf{z}_i^k)] + \mathbf{b}_i^T [\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_i^k] \right\} \quad (5.37)$$

Com:

$$\bar{\mathbf{z}}_i^{(e)}(\mathbf{z}_i^{(e)}) = \left(\mathbf{z}_i^{(e)} \right)^{-\alpha}, i = 1, \dots, m, \alpha > 0 \quad (5.38)$$

² JIANG, Y., RAMOS JR., A. S., PAULINO, G. H., Topology optimization with design-dependent loading: An adaptive sensitivity-separation design variable update scheme, Struct. Multidiscip. Optim. (2020) <http://dx.doi.org/10.1007/s00158-019-02430-4>, (in press).

$$a_i^{(e)} = \frac{\partial f^-(\mathbf{z}_1^k, \dots, \mathbf{z}_m^k)}{\partial \bar{z}_i^{(e)}} = -\frac{1}{\alpha} \left(\bar{z}_i^{(e),k} \right)^{1+\alpha} \frac{\partial f^-(\mathbf{z}_1^k, \dots, \mathbf{z}_m^k)}{\partial z_i^{(e)}} \geq 0, e = 1, \dots, N \quad (5.39)$$

$$b_i^{(e)} = \frac{\partial f^+(\mathbf{z}_1^k, \dots, \mathbf{z}_m^k)}{\partial z_i^{(e)}} \geq 0, e = 1, \dots, N \quad (5.40)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z_i^{(e)}} = \frac{\partial f^-}{\partial z_i^{(e)}} + \frac{\partial f^+}{\partial z_i^{(e)}} \quad (5.41)$$

Onde k indica a iteração do processo de otimização; $\mathbf{a}_i$ é o vetor definido como $\{a_i^{(1)}, \dots, a_i^{(N)}\}^T$ com as componentes definidas em (5.39); e $\mathbf{b}_i$ é o vetor definido por $\{b_i^{(1)}, \dots, b_i^{(N)}\}^T$ com as componentes definidas em (5.40).

O termo separação de sensibilidade vem de (5.41), uma vez que a sensibilidade é separada em duas parcelas, com $\partial f^- / \partial z_i^{(e)} \leq 0$ e $\partial f^+ / \partial z_i^{(e)} \geq 0$.

Giraldo-Londoño *et al.* (2020) realizaram a separação de sensibilidade de forma que as derivadas de segunda ordem da aproximação convexa da função objetivo, (5.37), se aproximasse das derivadas de segunda ordem da função original f . A derivada de primeira ordem é dada pela equação (5.42) e a derivada de segunda ordem é dada pela equação (5.43).

$$\frac{\partial \bar{f}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m)}{\partial z_i^{(e)}} = a_i^{(e)} \frac{\partial \bar{z}_i^{(e)}}{\partial z_i^{(e)}} + b_i^{(e)} = -\alpha a_i^{(e)} \left(z_i^{(e)} \right)^{-1-\alpha} + b_i^{(e)} \quad (5.42)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{f}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m)}{\partial \left(z_i^{(e)} \right)^2} = -\alpha(-\alpha-1) a_i^{(e)} \left(z_i^{(e)} \right)^{-\alpha-2} \quad (5.43)$$

Ao substituir (5.39) em (5.43), obtém-se a relação:

$$\frac{\partial f^-(\mathbf{z}_1^k, \dots, \mathbf{z}_m^k)}{\partial z_i^{(e)}} = -\frac{\left(z_i^{(e)} \right)}{(\alpha+1)} \frac{\partial^2 \bar{f}(\mathbf{z}_1^k, \dots, \mathbf{z}_m^k)}{\partial \left(z_i^{(e)} \right)^2} \quad (5.44)$$

A relação (5.44) é utilizada para obter as parcelas negativas e positivas de sensibilidade da função objetivo:

$$\frac{\partial f^-(\mathbf{z}_1^k, \dots, \mathbf{z}_m^k)}{\partial z_i^{(e)}} = \min \left\{ -\frac{z_i^{(e)} |h_i^{(e),k}|}{(\alpha+1)}, \frac{\partial f^-(\mathbf{z}_1^k, \dots, \mathbf{z}_m^k)}{\partial z_i^{(e)}} \right\} \quad (5.45)$$

$$\frac{\partial f^+(\mathbf{z}_1^k, \dots, \mathbf{z}_m^k)}{\partial z_i^{(e)}} = \frac{\partial f^+(\mathbf{z}_1^k, \dots, \mathbf{z}_m^k)}{\partial z_i^{(e)}} - \frac{\partial f^-(\mathbf{z}_1^k, \dots, \mathbf{z}_m^k)}{\partial z_i^{(e)}} \quad (5.46)$$

Em (5.45), $h_i^{(e),k}$ corresponde a uma aproximação da hessiana da função objetivo.

O cálculo da aproximação da hessiana da função objetivo possui um custo computacional reduzido, sendo esta a razão de seu uso. Além disso, é preciso obter apenas uma aproximação dos termos da diagonal principal da hessiana, o que demanda menos memória para o seu armazenamento (GIRALDO-LONDOÑO *et al.*, 2020). Giraldo-Londoño e Paulino (2020) obtiveram essa aproximação baseando-se na atualização de *Powell Symmetric Broyden* (DENNIS JR; SCHNABEL, 1996; MARJUGI; LEONG, 2013):

$$\mathbf{h}_k = \mathbf{h}_{k-1} + \frac{\mathbf{c}_k^T \mathbf{s}_k - \mathbf{h}_{k-1}^T \mathbf{s}_k^2}{(\mathbf{s}_k^2)^T \mathbf{s}_k^2} \mathbf{s}_k^2 \quad (5.47)$$

Onde,

$$\mathbf{h}_k = [h_1^{(1),k}, \dots, h_1^{(N),k}, \dots, h_m^{(1),k}, \dots, h_m^{(N),k}]^T \quad (5.48)$$

$$\mathbf{c}_k = \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{z}} \right|_{\mathbf{z}=\mathbf{z}^k} - \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{z}} \right|_{\mathbf{z}=\mathbf{z}^{k-1}} \quad (5.49)$$

$$\mathbf{s}_k = \mathbf{z}^k - \mathbf{z}^{k-1} \quad (5.50)$$

$$\mathbf{s}_k^2 = \left[\left(z_1^{(1),k} - z_1^{(1),k-1} \right)^2, \dots, \left(z_1^{(N),k} - z_1^{(N),k-1} \right)^2, \dots, \left(z_m^{(1),k} - z_m^{(1),k-1} \right)^2, \dots, \left(z_m^{(N),k} - z_m^{(N),k-1} \right)^2 \right]^T \quad (5.51)$$

$$\mathbf{z} = [z_1^{(1)}, \dots, z_1^{(N)}, \dots, z_m^{(1)}, \dots, z_m^{(N)}]^T \quad (5.52)$$

Linearizam-se também as restrições de volume:

$$\bar{g}_j(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m) = g_j(\mathbf{z}_1^k, \dots, \mathbf{z}_m^k) + \sum_{i \in \mathcal{G}_j} \sum_{l \in \mathcal{E}_j} \frac{\partial g_j}{\partial z_i^{(e)}} (z_i^{(e)} - z_i^{(e),k}) \quad (5.53)$$

Com (5.37) e (5.53), define-se o subproblema de otimização aproximado, desprezando os termos constantes da aproximação da função objetivo:

$$\begin{aligned} \text{Obter:} \quad & \mathbf{Z}^{k+1} = \{\mathbf{z}_1^{k+1}, \dots, \mathbf{z}_m^{k+1}\} \\ \text{Que minimiza:} \quad & \bar{f}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m) = \sum_{i=1}^m [\mathbf{a}_i^T \bar{\mathbf{z}}_i(\mathbf{z}_i) + \mathbf{b}_i^T \mathbf{z}_i] \end{aligned} \quad (5.54)$$

$$\begin{aligned} \text{Tal que:} \quad & \bar{g}_j(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m) \leq 0, \quad j = 1, \dots, nc \\ & z_{i,L}^{(e),k} \leq z_i^{(e)} \leq z_{i,U}^{(e),k}, \quad i = 1, \dots, m \quad \text{e} \quad e = 1, \dots, N \end{aligned}$$

A atualização das variáveis de projeto está sujeita a limites laterais móveis, em vez dos limites laterais absolutos (z_{min} e 1). A necessidade de limites laterais móveis se dá pela natureza da aproximação da função objetivo, a qual é obtida por uma série de Taylor de primeira ordem em termos das variáveis intermediárias e, portanto, tem maior precisão nas proximidades de $\mathbf{Z}^k$. Os limites laterais móveis são definidos de acordo com a equação (5.55).

$$\begin{cases} z_{i,L}^{(e),k} = \max(z_{min}, z_i^{(e),k} - M) \\ z_{i,U}^{(e),k} = \min(1, z_i^{(e),k} + M) \end{cases} \quad (5.55)$$

Sendo que M consiste no limite móvel.

A função Lagrangeana do subproblema de otimização é:

$$\mathcal{L}(\mathbf{z}_1^k, \dots, \mathbf{z}_m^k, \phi^1, \dots, \phi^{nc}) = \sum_{i=1}^m [\mathbf{a}_i^T \bar{\mathbf{z}}_i(\mathbf{z}_i) + \mathbf{b}_i^T \mathbf{z}_i] + \sum_{j=1}^{nc} \phi^j \bar{g}_j(\mathbf{z}_1^k, \dots, \mathbf{z}_m^k) \quad (5.56)$$

Sendo ϕ^j os multiplicadores de Lagrange.

Se for considerado que cada variável de projeto está associada a apenas uma restrição de volume, a função Lagrangeana pode ser reescrita de forma que seja obtida uma função separável para cada restrição, conforme a equação (5.57).

$$\mathcal{L}(\mathbf{z}_1^k, \dots, \mathbf{z}_m^k, \phi^1, \dots, \phi^{nc}) = \sum_{j=1}^{nc} \mathcal{L}^j(\mathbf{z}_1^k, \dots, \mathbf{z}_m^k, \phi^j) \quad (5.57)$$

Sendo:

$$\mathcal{L}^j(\mathbf{z}_1^k, \dots, \mathbf{z}_m^k, \phi^j) = \sum_{i \in \mathcal{G}_j} \sum_{l \in \mathcal{E}_j} \left[a_i^{(e)} \bar{z}_i^{(e)} + b_i^{(e)} z_i^{(e)} + \phi^j \frac{\partial g_j}{\partial z_i^{(e)}} (z_i^{(e)} - z_i^{(e),k}) \right] - \phi^j g_j(\mathbf{z}_1^k, \dots, \mathbf{z}_m^k) \quad (5.58)$$

Pela condição de otimalidade, tem-se:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_i^{(e)}} = \frac{\partial \mathcal{L}^j}{\partial z_i^{(e)}} = a_i^{(e)} \frac{\partial \bar{z}_i^{(e)}}{\partial z_i^{(e)}} + b_i^{(e)} + \phi^j \frac{\partial g_j}{\partial z_i^{(e)}} = 0 \quad (5.59)$$

Substituindo (5.38), (5.39) e (5.40) em (5.59), chega-se a:

$$z_i^{(e)} = \bar{z}_i^{(e),k} \left[\frac{\frac{\partial f^-(\mathbf{z}_1^k, \dots, \mathbf{z}_m^k)}{\partial z_i^{(e)}}}{\frac{\partial f^+(\mathbf{z}_1^k, \dots, \mathbf{z}_m^k)}{\partial z_i^{(e)}} + \phi^j \frac{\partial g_j}{\partial z_i^{(e)}}} \right]^{\frac{1}{1+\alpha}} \quad (5.60)$$

Definindo os termos (5.61) e (5.62):

$$B_i^{(e),k}(\phi^j) = - \frac{\frac{\partial f^-(\mathbf{z}_1^k, \dots, \mathbf{z}_m^k)}{\partial z_i^{(e)}}}{\frac{\partial f^+(\mathbf{z}_1^k, \dots, \mathbf{z}_m^k)}{\partial z_i^{(e)}} + \phi^j \frac{\partial g_j}{\partial z_i^{(e)}}} \quad (5.61)$$

$$\eta = \frac{1}{1+\alpha} \quad (5.62)$$

A solução pode ser reescrita como:

$$z_i^{(e)*} = z_i^{(e),k} \left(B_i^{(e),k}(\phi^j) \right)^\eta \quad (5.63)$$

O parâmetro definido em (5.62) é denominado fator de amortecimento, sendo usualmente calculado utilizando α igual a 1, de forma que se obtenha um valor de $\eta = 0,5$. Este parâmetro

tem o objetivo de desacelerar o processo de convergência do método, a fim de estabilizar a geração da topologia ótima (BENDSØE; SIGMUND, 2004).

O termo (5.61) é uma função do multiplicador de Lagrange associado à restrição j , e este é obtido por meio do método da bisseção de modo que a atualização das variáveis respeite a restrição de volume j , a qual é recuperada aplicando a condição de estacionariedade em relação ao multiplicador de Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^j} = \frac{\partial \mathcal{L}^j}{\partial \phi^j} = g_j(\mathbf{z}_1^k, \dots, \mathbf{z}_m^k) + \sum_{i \in \mathcal{G}_j} \sum_{l \in \mathcal{E}_j} \frac{\partial g_j}{\partial \mathbf{z}_i^{(e)}} \left(\mathbf{z}_i^{(e)}(\phi^j) - \mathbf{z}_i^{(e),k} \right) = 0 \quad (5.64)$$

A solução da equação (5.63) deve respeitar ainda os limites laterais móveis do problema (5.55). Assim, a atualização das variáveis de projeto associadas à restrição de volume j é feita conforme indicado em (5.65). Deste modo, como a atualização das variáveis de projeto estão associadas a apenas uma restrição de volume, o esquema de atualização pode ser feito de forma sequencial ou em paralelo.

$$\mathbf{z}_i^{(e),k+1} = \begin{cases} \mathbf{z}_{i,U}^{(e),k}, & \mathbf{z}_i^{(e),*} \geq \mathbf{z}_{i,U}^{(e),k} \\ \mathbf{z}_i^{(e),*}, & \mathbf{z}_{i,L}^{(e),k} < \mathbf{z}_i^{(e),*} < \mathbf{z}_{i,U}^{(e),k} \\ \mathbf{z}_{i,L}^{(e),k}, & \mathbf{z}_i^{(e),*} \leq \mathbf{z}_{i,L}^{(e),k} \end{cases} \quad (5.65)$$

Por fim, Giraldo-Londoño *et al.* (2020) propuseram um esquema de amortecimento, a fim de reduzir as oscilações da função objetivo no início do processo de otimização, quando a aproximação da hessiana não é precisa:

$$\mathbf{z}_i^{k+1} = \zeta \mathbf{z}_i^{k+1} + (1 - \zeta) \mathbf{z}_i^k, i = 1, \dots, m$$

Onde $0 < \zeta < 1$ é o parâmetro de amortecimento da atualização.

5.3. SOBRE A IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

A implementação computacional foi feita utilizando como base o código educacional, `PolyMat`, fornecido no artigo de Sanders *et al.* (2018). Devido a modularidade do código, as principais alterações consistiram na alteração da rotina de análise estrutural; no cálculo da função objetivo e de sua sensibilidade.

Caso seja adotado o problema de otimização da maximização da energia potencial total estacionária, apresentado na equação (5.2), o sistema de equações de equilíbrio é solucionado utilizando o algoritmo de Newton-Raphson do Quadro 3.1. Utiliza-se como vetor de deslocamentos inicial o vetor de deslocamentos da solução da iteração anterior do processo de otimização. Desse modo o resíduo inicial é menor o que implica em uma quantidade menor de iterações para se chegar à convergência.

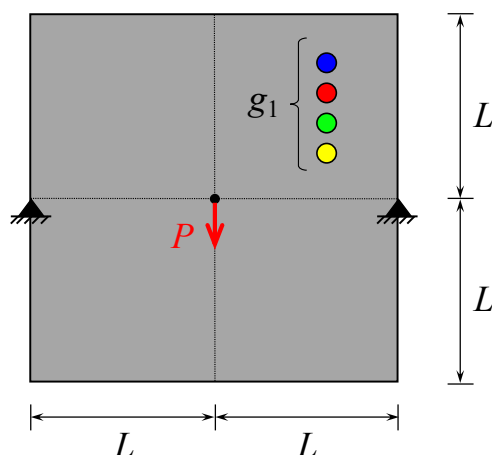
Caso seja adotado o problema de otimização de maximização da energia interna de deformação, apresentado na equação (5.3), o sistema de equações de equilíbrio com a restrição de energia é solucionado utilizando o algoritmo apresentado no Quadro 4.1.

Por fim, ressalta-se que para aumentar a eficiência computacional, foi utilizado um arquivo MEX para realizar a compilação da matriz de rigidez, do vetor de forças internas e energia interna de deformação em cada elemento. O uso do arquivo MEX foi feito a partir de uma adaptação da rotina fornecida no código educacional `PolyStress` (LONDOÑO; PAULINO, 2021a).

5.4. EXEMPLO DE VALIDAÇÃO: VIGA BIAPOIADA COM CARGA NO CENTRO DO DOMÍNIO

Para validar a implementação computacional do problema de maximização da energia potencial total estacionária, apresentado na equação (5.2), e as modificações do esquema de atualização das variáveis de projeto ZPR, foi reproduzido o exemplo apresentado por Zhang e Chi (2020), cuja geometria, condições de contorno e definição da restrição de volume são apresentadas na Figura 5.3.

Figura 5.3 - Exemplo de validação: Geometria e condições de contorno



Na Figura 5.3, tem-se a indicação de que o problema foi definido com uma única restrição de volume em todo o domínio, a qual se tem associada quatro materiais distintos, indicados por meio dos círculos com diferentes cores. Os autores definiram quatro materiais, sendo dois materiais com o modelo constitutivo de Ogden compressível e dois materiais com o modelo constitutivo bilinear. Os parâmetros que definem os materiais e as cores utilizadas para sua identificação são apresentados na Tabela 5.1.

Tabela 5.1 - Definição dos modelos, cores e parâmetros dos materiais

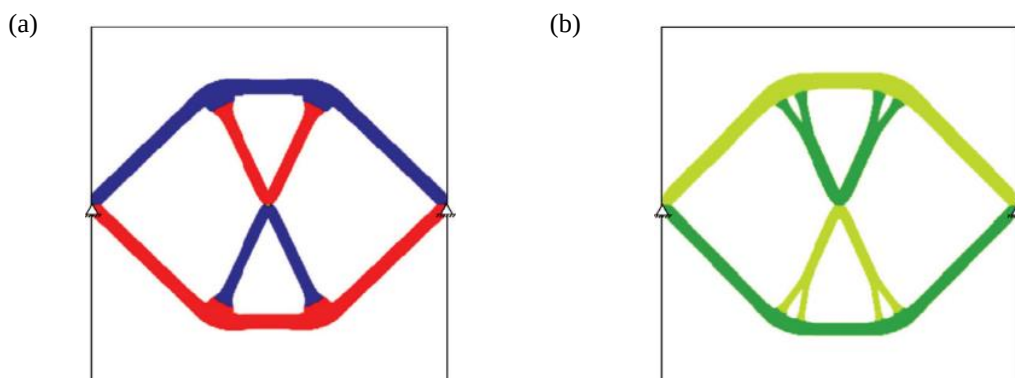
Material	Modelo	Cor	E_t (kPa)	E_c (kPa)	ν_t	ν_c
1	Bilinear	●	2,0e4	0,5e4	0,35	0,0875
2	Bilinear	●	0,5e4	2,0e4	0,0875	0,35
Material	Modelo	Cor	E_o (kPa)	ν	α	
3	Ogden	●	1,0e4	0,30	1000	
4	Ogden	●	1,0e4	0,30	-1000	

Ressalta-se que os parâmetros apresentados na Tabela 5.1 não são totalmente idênticos aos utilizados por Zhang e Chi (2020). O motivo é que o módulo de elasticidade reduzido dos materiais com os modelos constitutivos bilineares 1 e 2 adotados pelos autores não respeitam a relação $E_t \nu_c = E_c \nu_t$. Por isso, neste trabalho, optou-se por adotar o mesmo coeficiente de Poisson reduzido, igual a 0,0875, e definir o módulo de elasticidade a partir deste, o que forneceu um valor de 5000 kPa em vez de 125 kPa que os autores do trabalho referenciado adotaram.

Foi utilizada uma única restrição de volume, g_1 , com fração de volume igual a 15% do volume do domínio estendido. O raio inicial do filtro de densidade é igual a 0,02 m e o limite móvel do esquema de atualização é igual a 0,1. Assim como no trabalho de referência, foi utilizado um esquema de continuação para o valor da penalização do modelo SIMP, iniciando o processo de otimização com um valor de p igual a 1, e aumentando o mesmo a cada 2 iterações em 0,1 até um valor igual a 3. Também foi realizada uma continuação para o valor do raio do filtro de densidade, o qual é reduzido a partir da iteração 120 do processo de otimização em $3 R_0 / 20$ a cada 10 iterações até um valor igual a $R_0 / 4$.

A Figura 5.4 apresenta as soluções obtidas por Zhang e Chi (2020) utilizando uma malha estruturada com 300 x 300 elementos quadrados.

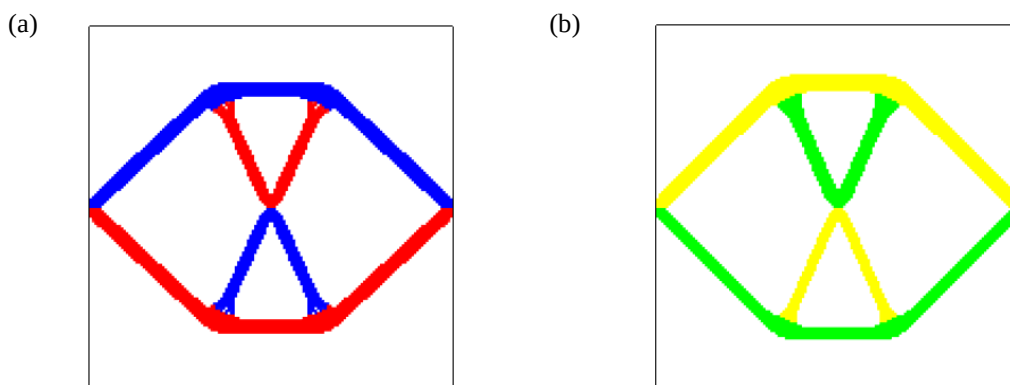
Figura 5.4 - Soluções do exemplo de validação: (a) $P = 0,5$ kN; (b) $P = 3,0$ kN. Fonte: Zhang e Chi (2020)



Como no artigo de Zhang e Chi (2020) não foi utilizado a versão do ZPR com a separação de sensibilidade, primeiro apresenta-se as soluções sem a utilização desta técnica.

Foi utilizada uma malha estruturada com 150 x 150 elementos quadrados, que, limitações de armazenamento de memória nos computadores do LABMEC/UFG, era menos refinada que a da referência. As soluções obtidas são apresentadas na Figura 5.5. Como no artigo de Zhang e Chi (2020) não foi utilizado a versão do ZPR com a separação de sensibilidade, primeiro apresentam-se as soluções sem a utilização desta técnica.

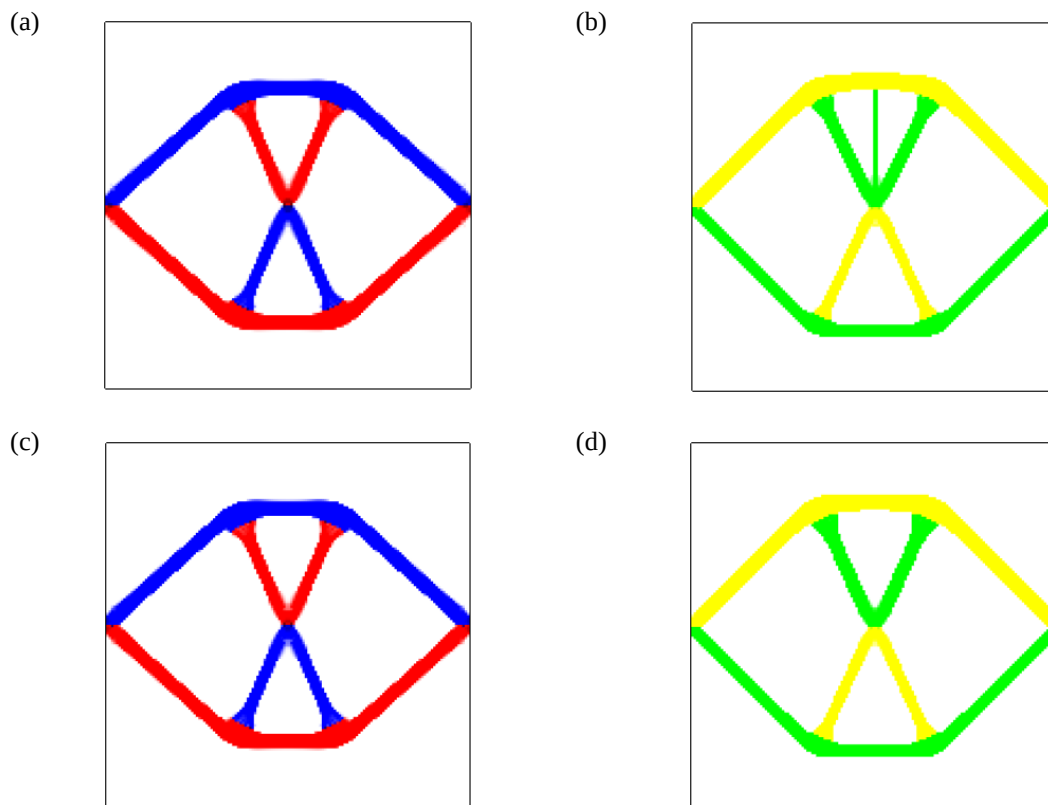
Figura 5.5 - Soluções obtidas com o ZPR sem separação de sensibilidade: (a) $P = 0,5$ kN; (b) $P = 3,0$ kN



Embora tenha sido utilizada uma malha menos refinada e tenha sido feita a alteração nos valores dos parâmetros dos materiais bilineares, as soluções obtidas estão de acordo com a referência. Para um nível baixo carregamento, os materiais bilineares são mais rígidos que os materiais com o modelo de Ogden compressível e, por isso, predominam na solução. Porém, para um nível de carregamento mais elevado, os materiais com modelo hiperelástico, tornam-se mais rígidos, o que justifica sua predominância na solução.

Apresenta-se também a solução obtida neste trabalho utilizando a versão do ZPR com a separação de sensibilidade. O valor do parâmetro de amortecimento é $\zeta = 0,5$ e a aproximação inicial dos termos da hessiana da função objetivo aproximada é igual a 0. Foram obtidas soluções sem e com a realização de um esquema de continuação para o valor do parâmetro γ , o qual está relacionado à interpolação que penaliza a mistura de materiais, conforme apresentado na Figura 5.6. A continuação do parâmetro γ foi feita de modo que se iniciou o processo de otimização com um valor igual a zero e, então, a cada 10 iterações o valor foi incrementado em 0,1 até um valor máximo igual a 1.

Figura 5.6 - Soluções obtidas com o ZPR com separação de sensibilidade. Sem realizar a continuação no parâmetro γ : (a) $P = 0,5$ kN; (b) $P = 3,0$ kN. Realizando a continuação no parâmetro γ : (c) $P = 0,5$ kN; (d) $P = 3,0$ kN



Observa-se na Figura 5.6, que sem a realização de um esquema de continuação do parâmetro γ , a solução obtida para um valor de carregamento igual a 3 kN apresentou uma assimetria em relação ao eixo horizontal, com a presença de uma barra a mais na solução, o que pode ser interpretada como um mínimo local do problema. Contudo, ao realizar o esquema de continuação, a simetria foi recuperada.

A Tabela 5.2 apresenta os valores finais de função objetivo. Observa-se que embora haja diferenças no refinamento da malha de elementos finitos e na definição dos parâmetros do material, além da semelhança visual das soluções obtidas, os valores de função objetivo também são próximos aos apresentados no trabalho de referência.

Tabela 5.2 - Comparação dos valores da função objetivo (Nm)

P (kN)	Zhang e Chi (2020)	Presente trabalho	
		Sem separação de sensibilidade	Com separação de sensibilidade e continuação de γ
0,5	0,091	0,082	0,084
3,0	3,55	3,439	3,445

5.5. EXEMPLOS

Os exemplos de 1 a 6 apresentados nesta seção utilizam a formulação de maximização da energia potencial total estacionária e foram desenvolvidos aplicando o filtro de densidade associado a um esquema de continuação no valor do raio do filtro visando obter soluções com menos densidades intermediárias nas bordas dos membros. A continuação no valor do raio é feita a partir de um número de iterações pré-estabelecidas, igual a 150 iterações, sendo iniciado o processo com $R = R_0$. A partir desse ponto, o raio é atualizado a cada 10 iterações, reduzindo o raio $R = R - \Delta R$ com $\Delta R = 3 R_0 / 20$ até um valor mínimo de $R = R_0 / 4$ ser atingido. Também foi realizada uma continuação no valor da penalização p do SIMP, iniciando o processo de otimização com um valor de $p = 1$, e aumentando em 0,1 a cada iteração até atingir um valor de $p = 3$. Também foi utilizado um esquema de continuação para o parâmetro γ . Inicia-se o processo com um valor igual a zero, e este é aumentado em 0,1 a cada 10 iterações até assumir um valor unitário.

Os exemplos 7 e 8 apresentados nesta seção, no item 5.5.7 e no item 5.5.8, utilizam a formulação de maximização da energia interna de deformação. Nesses exemplos também foi utilizado o filtro de densidade, com o mesmo esquema de continuação, porém com o mesmo se iniciando após a iteração 200. Foi utilizado o modelo de penalização SIMP, porém sem a realização de esquema de continuação para o valor da penalização p , esse possui um valor constante e igual a 3. E não foi realizado um esquema de continuação para o parâmetro γ , este possui um valor constante e igual a unidade.

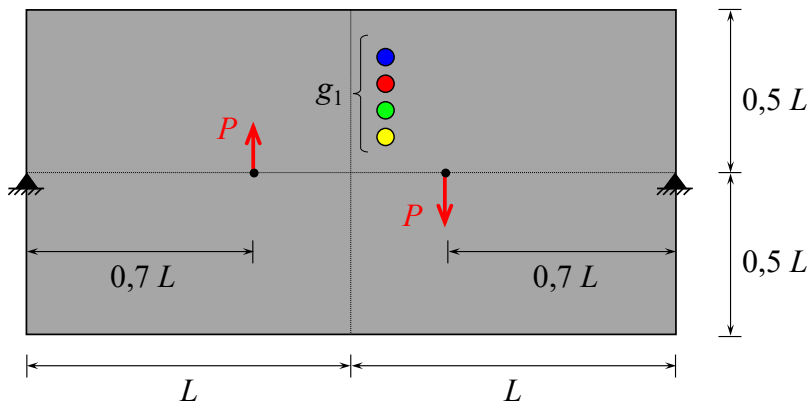
O valor do parâmetro de amortecimento é $\zeta = 0,5$ e a aproximação inicial dos termos da hessiana da função objetivo aproximada é igual a zero. O limite móvel do ZPR, M , é igual a 0,1 quando utilizado o problema de maximização da energia potencial total estacionária, e igual a

0,02 quando utilizando o problema de maximização da energia interna de deformação. E o amortecimento do ZPR η é igual a 0,5.

5.5.1. Exemplo 01: Viga biapoiada com cargas opostas

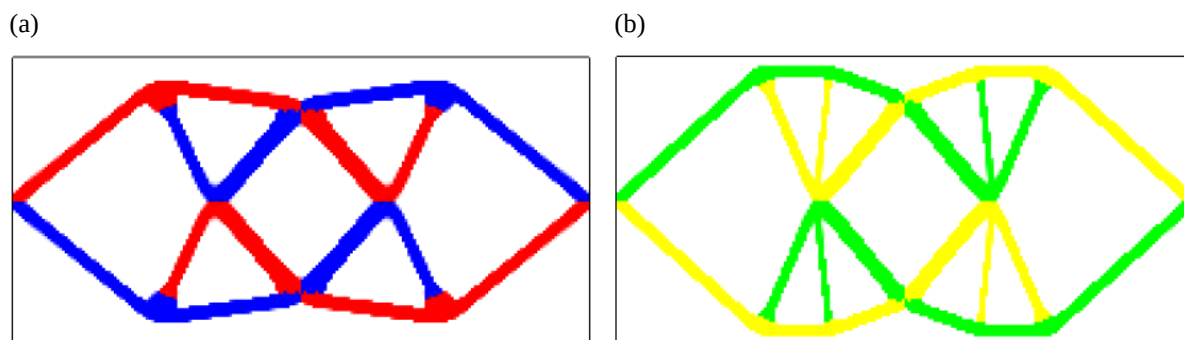
Analisa-se neste exemplo uma viga biapoiada com cargas antissimétricas, com geometria, condições de contorno e definição da restrição de volume apresentadas na Figura 5.7. A dimensão L é igual a 1 m. Foram utilizados quatro materiais com parâmetros e cores identificadoras apresentados na Tabela 5.1. Foi utilizada uma única restrição de volume envolvendo todos os materiais em todo o volume, à qual foi atribuída uma fração de volume igual a 20% do volume do domínio estendido. O domínio foi discretizado em uma malha estruturada de 200×100 elementos quadrados e o valor inicial do raio do filtro de densidade $R_0 = 0,03$ m

Figura 5.7 – Exemplo 01: Geometria e condições de contorno



Como nenhum dos materiais candidatos é definido por um modelo constitutivo com limite de tensão, foi adotado o problema de otimização de maximização da energia potencial total estacionária, apresentado em (5.2).

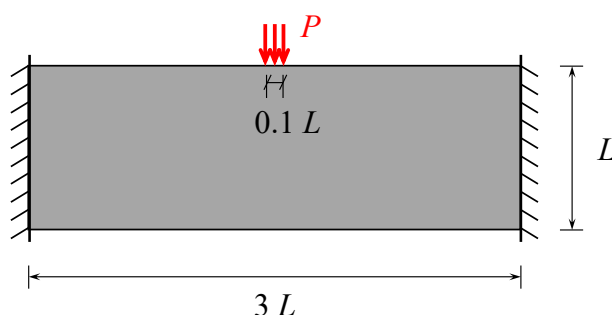
Nas soluções apresentadas na Figura 5.8, a seleção dos materiais para as regiões de tração e compressão tem um comportamento similar ao das soluções do exemplo de validação. Para um nível de carregamento os materiais com modelo bilinear conferem maior rigidez e predominam na solução. Porém, para um nível de carregamento mais elevado, o nível de deformação também é maior, o que faz com que os materiais com o modelo hiperelástico confirmem maior rigidez e predominem na solução.

Figura 5.8 - Viga biapoiada com cargas opostas: (a) $P = 0.5$ kN; (b) $P = 3$ kN

5.5.2. Exemplo 02: Viga engastada com carga no meio do vão

Analisa-se neste exemplo uma viga engastada com uma carga vertical distribuída na aresta superior, com geometria e condições de contorno apresentadas na Figura 5.9. Foram utilizados quatro materiais com parâmetros e cores identificadoras apresentados na Tabela 5.1. A dimensão L é igual a 1 m. O domínio foi discretizado em uma malha estruturada de 240×80 elementos quadrados e o valor inicial do raio do filtro de densidade é igual a 0,04 m. Como nenhum dos materiais candidatos é definido por um modelo constitutivo com limite de tensão, foi adotado o problema de otimização de maximização da energia potencial total estacionária, apresentado em (5.2).

Figura 5.9 - Exemplo 02: Geometria e condições de contorno



O problema foi solucionado considerando dois casos de restrições de volume. No primeiro caso, os 4 materiais foram associados em uma única restrição de volume de 30% do volume do domínio estendido; no segundo, associa-se cada material a uma restrição de volume de 7,5% do volume do domínio estendido.

5.5.2.1. Caso 01

A Figura 5.10 apresenta a definição da restrição de volume aplicada ao caso 01. O problema foi solucionado para dois níveis de carregamento, $P = 10$ e 100 kN/m, cujas soluções são apresentadas na Figura 5.11.

Figura 5.10 - Exemplo 02: Definição da restrição de volume do caso 01

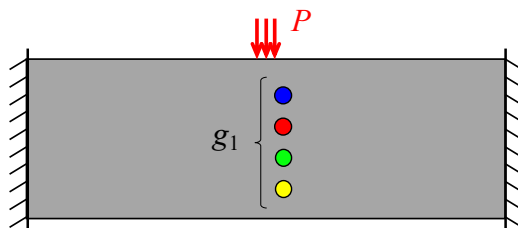
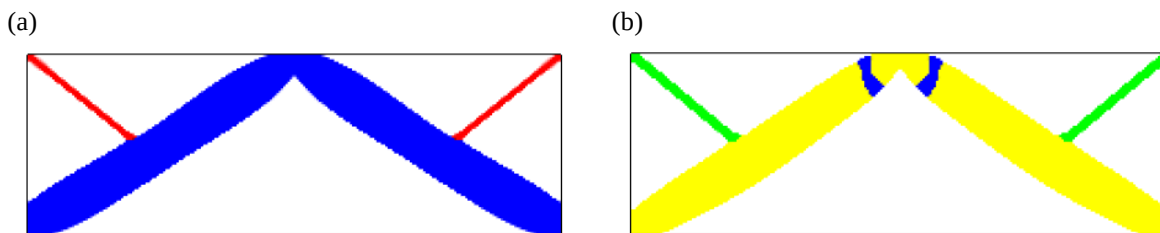


Figura 5.11 – Exemplo 02: Soluções para o Caso 1: (a) $P = 1$ kN; (b) $P = 10$ kN



As topologias obtidas são semelhantes. Porém, a seleção de material mudou com o aumento do nível de carregamento, pelo fato de os materiais com comportamento hiperelástico conferirem maior rigidez para o maior nível de tensão e deformação.

5.5.2.2. Caso 02

A Figura 5.12 apresenta a definição da restrição de volume. O problema é solucionado para dois níveis de carregamento, $P = 10$ e 100 kN/m, cujas soluções são apresentadas na Figura 5.13

Figura 5.12 - Exemplo 02: Definição da restrição de volume do caso 03

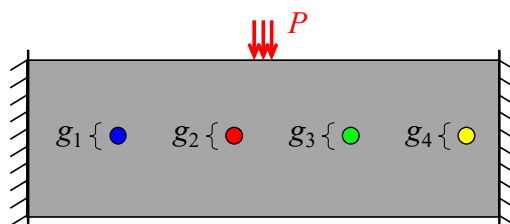
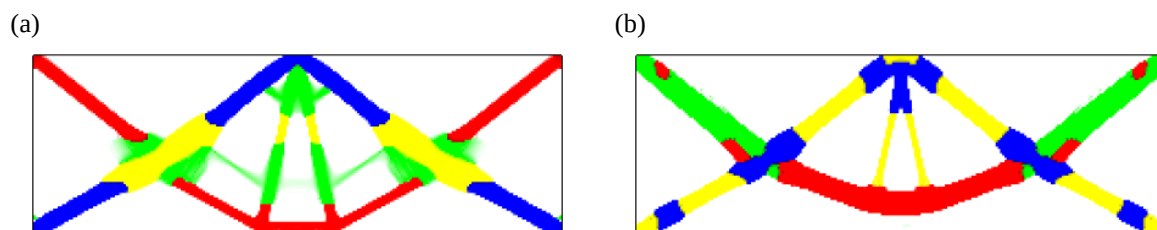


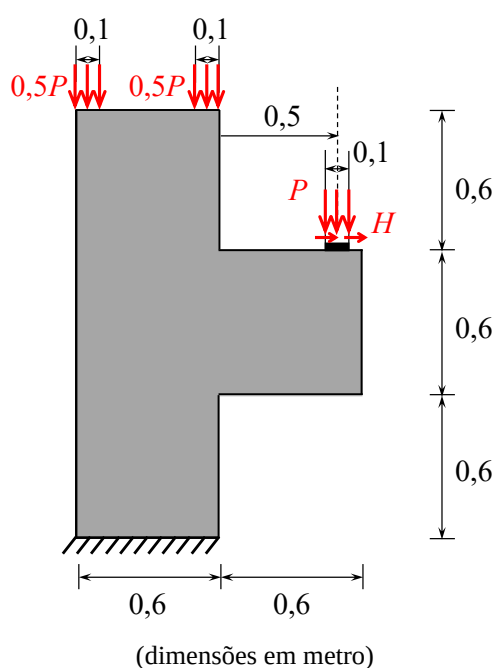
Figura 5.13 – Exemplo 02: Soluções para o Caso 2: (a) $P = 1$ kN; (b) $P = 10$ kN

Para esta definição de restrição de volume, não apenas a seleção de material nos membros das estruturas é distinta para os dois níveis de carregamento, mas também a topologia. As restrições de volume aplicadas a cada material obrigam a presença de todos os materiais nas topologias finais, o que justifica a alteração da topologia em relação às soluções do Caso 01.

5.5.3. Exemplo 03: Consolo curto de concreto

Este exemplo consiste em um consolo curto, cuja geometria e condições de contorno são apresentadas na Figura 5.14. O domínio é discretizado em uma malha de elementos finitos poligonais, cuja composição é apresentada na Figura 5.14, com um total de 15000 elementos finitos. O valor da carga vertical P é igual a 20 kN/m e o valor da força horizontal H é variado a fim de identificar sua influência na solução obtida.

Figura 5.14 - Consolo curto: geometria, condições de contorno e composição da malha de elementos finitos poligonais



Nº de arestas	Polígono	Nº de polígonos de n arestas
4		24
5		1558
6		12484
7		934
Nº de elementos		15000

A fim de aproximar a solução obtida por otimização topológica dos caminhos de carga em um elemento em concreto reforçado com armaduras passivas, define-se para este exemplo, 4 materiais utilizando o modelo constitutivo bilinear. Na Tabela 5.3 são apresentadas as cores que identificam cada material e além dos valores de módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson à tração e à compressão.

Tabela 5.3 - Identificação e parâmetros dos materiais

Material	Cor	E_t (MPa)	E_c (MPa)	ν_t	ν_c
1		210000,0	2100,0	0,30	0,003
2		2400,0	24000,0	0,02	0,20
3		10000,0	24000,0	0,083	0,20
4		210000,0	210000,0	0,30	0,30

O objetivo deste exemplo é que a topologia otimizada represente os caminhos de força no interior de uma estrutura de concreto armado. Assim, os materiais definidos na Tabela 5.3 foram escolhidos com o intuito de que o Material 1 represente a armadura de aço tracionada e, por isso foi estabelecido um valor reduzido de rigidez à compressão, a fim de evitar que ele seja alocado em regiões de estado de tensão de compressão predominante; o Material 2 represente o concreto, por isso adota-se uma rigidez à tração reduzida, a fim de evitar que ele seja alocado em regiões onde o estado de tensão de tração seja predominante; o Material 3 represente um concreto com um f_{ck} menos reduzido à tração, em que a rigidez à tração é menos reduzida que a do Material 1; e por fim o Material 4 representando o aço, com uma mesma rigidez à tração e a compressão, para ser utilizado em regiões passivas do domínio de projeto.

Como nenhum dos materiais candidatos, apresentados na Tabela 5.3, é definido por um modelo constitutivo com limite de tensão, foi adotado o problema de otimização de maximização da energia potencial total estacionária, apresentado em (5.2).

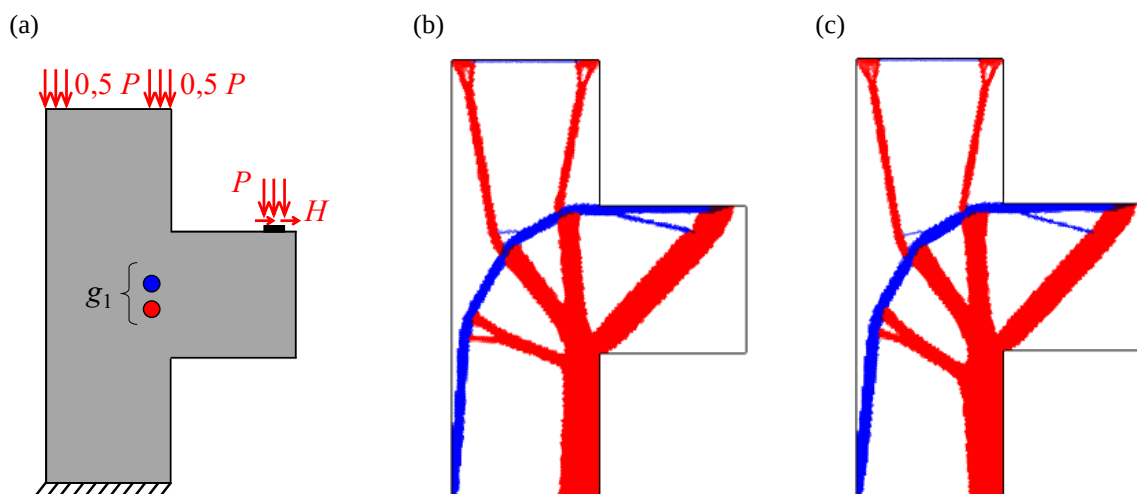
O raio inicial do filtro de densidade, R_0 , é igual a 0,02 m. O exemplo é analisado considerando diferentes restrições de volume, as quais são detalhadas em cada um dos itens a seguir.

5.5.3.1. Caso 01: 2 materiais e 1 restrição de volume global

Para este primeiro caso, são utilizados os Materiais 1 e 2 associados a uma única restrição de volume definida em todo o domínio de projeto, conforme ilustrado na Figura 5.15 (a). O valor

da fração de volume associada a esta restrição é de 30% do volume do domínio estendido. O problema foi solucionado considerando dois valores para carga horizontal H , 0 kN/m e 5 kN/m.

Figura 5.15 - Consolo curto - Caso 1: (a) Definição da restrição de volume; (b) Solução com $H = 0$; (c) Solução com $H = 5,0$ kN/m



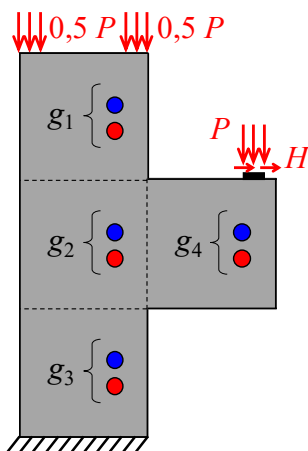
Observa-se que a presença de uma força horizontal com magnitude de 25% da força vertical, não promoveu modificações significativas na topologia resultante.

5.5.3.2. Caso 02: 2 materiais e 4 restrições de volume

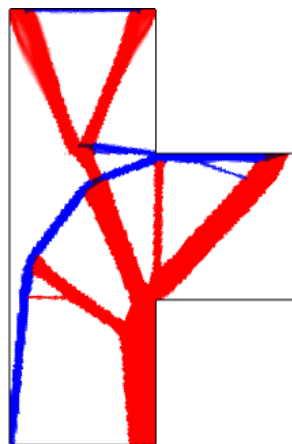
Neste item é explorada a possibilidade de se definir as restrições de volume em regiões parciais do domínio de projeto. Ao longo da altura do pilar definem-se três restrições de volume e na região do consolo é definida uma quarta restrição. São utilizadas 4 restrições, todas associadas aos Materiais 1 e 2, cada uma com uma fração de volume igual a 30% do volume de cada sub-região do domínio estendido. Neste caso, e nos demais, adota-se uma força horizontal com valor igual a 5 kN/m.

Figura 5.16 - Consolo curto - Caso 2: (a) Definição da restrição de volume; (b) Solução obtida

(a)



(b)

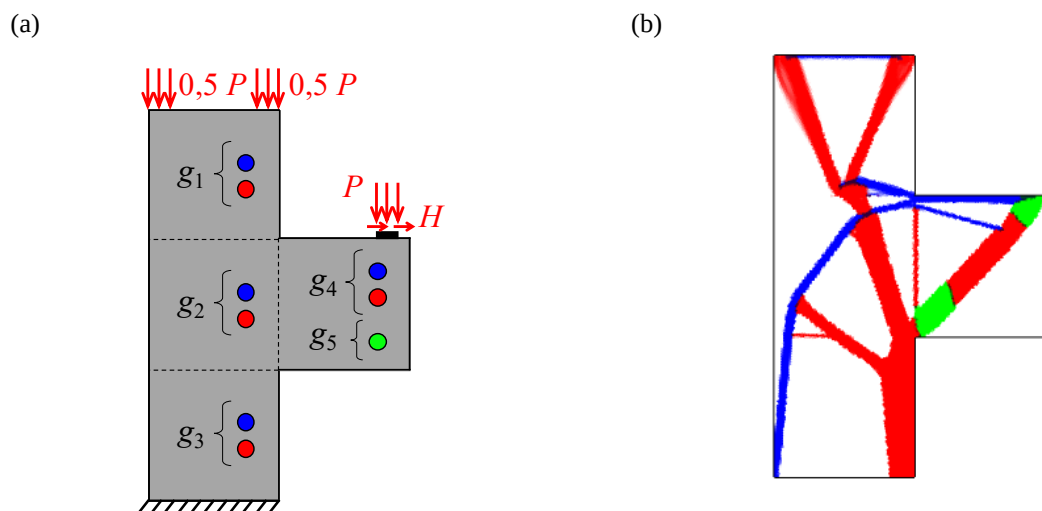


Na comparação da solução da Figura 5.16 (b) com a da Figura 5.15 (c), identifica-se que a solução obtida com a definição das restrições de volume utilizando sub-regiões do domínio estendido se difere da solução obtida adotando uma única restrição global de volume. Entre as diferenças, destaca-se a biela que passa a ser formada na interface entre o consolo e o pilar.

5.5.3.3. Caso 03: Uso de concreto mais resistente à tração

Neste item, utilizam-se das mesmas quatro regiões utilizadas para definir as restrições de volume no item 5.5.3.2, porém inclui-se uma quinta restrição de volume, também definida na região do consolo, associada ao Material 3, conforme apresentado na Figura 5.17. Adota-se $g_1 = g_2 = g_3 = 30\%$; $g_4 = 20\%$ e $g_5 = 10\%$.

O intuito é que o Material 3 represente um material com maior resistência à tração como o concreto reforçado com fibras. Deste modo, a solução da otimização topológica fornece as regiões preferíveis de se reforçar o consolo com esse concreto e como o seu uso afeta o caminho de forças no interior da estrutura.

Figura 5.17 - Consolo curto – Caso 3: (a) Definição da restrição de volume; (b) Solução com $H = 5,0$ kN

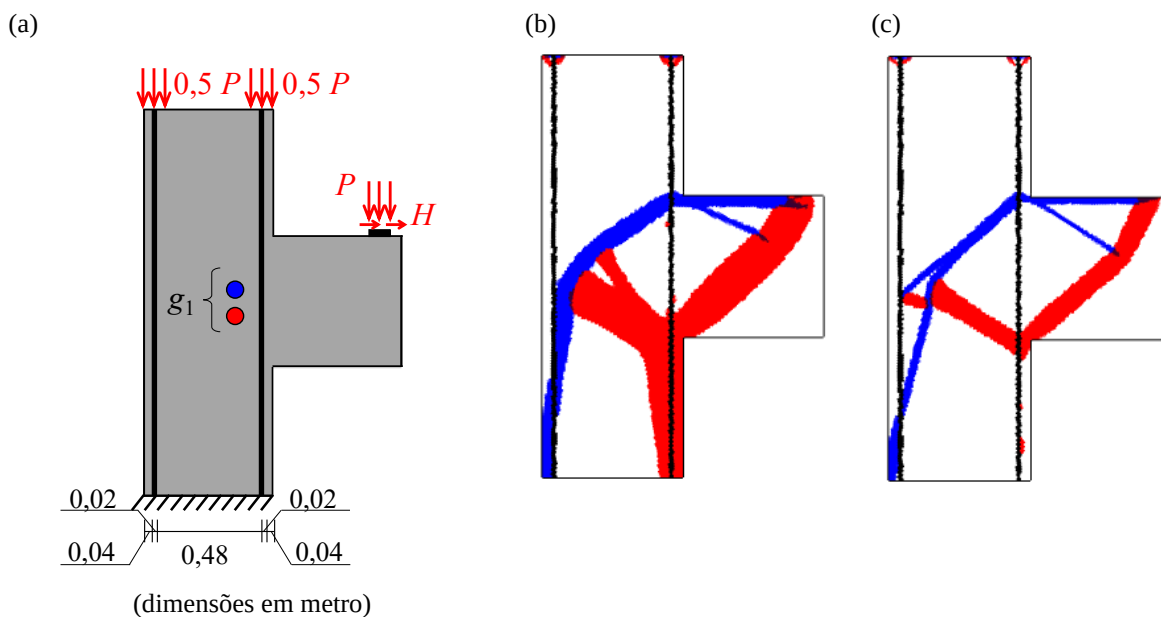
A solução apresentada na Figura 5.17 (b) em comparação com a apresentada na Figura 5.16 (b) indica que a utilização do Material 5, com maior resistência à tração, não altera o caminho de forças no interior do consolo em questão. Contudo, é possível identificar que as regiões do consolo que devem ser priorizadas em relação ao uso desse material são a região imediatamente abaixo da aplicação do carregamento e a região próxima ao canto inferior esquerdo, no nó da biela inclinada do consolo. Essas regiões foram priorizadas pela maior presença de tensões de tração em comparação à região da biela que se forma no corpo do consolo, o que justificaria o uso de um concreto com maior resistência à tração nessas regiões.

5.5.3.4. Caso 04: Regiões passivas com 1 restrição e 2 materiais

Neste item, consideram-se as restrições de volume de forma semelhante ao item 5.5.3.1, com uma restrição de volume única definida em todo domínio de projeto. Porém, adotam-se 2 regiões passivas com o intuito de representarem as armaduras longitudinais dos pilares. O intuito é avaliar a influência das armaduras já existentes no pilar no caminho de forças da ligação com o consolo.

As duas regiões passivas são associadas ao Material 4, o qual permanece com uma densidade igual à unidade (sólido) durante todo o processo de otimização. A definição da restrição de volume com as duas regiões passivas está ilustrada na Figura 5.18 (a).

Figura 5.18 - Consolo curto – Caso 4: (a) Definição da restrição de volume; (b) $g_1 = 30\%$; (c) $g_1 = 15\%$;



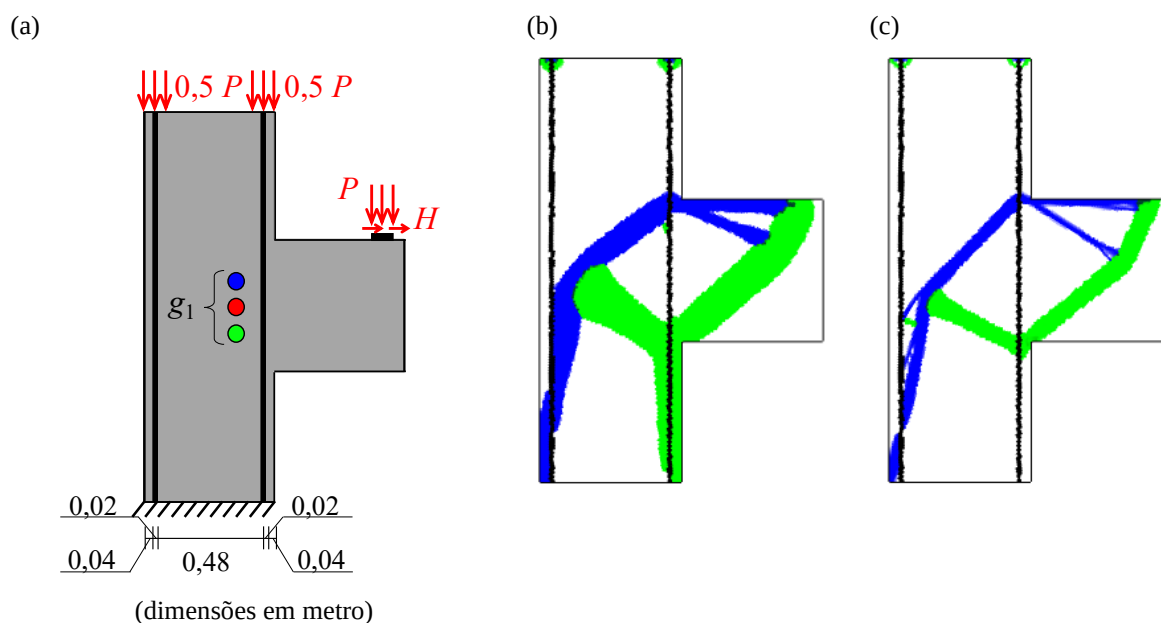
A comparação da solução Figura 5.18 (b) com a Figura 5.15 (c), indica que a presença da armadura dos pilares influencia nos caminhos de força no interior da estrutura. Observa-se que as bielas que estavam presentes na região do pilar acima do consolo na Figura 5.15 (c) não aparecem na solução da Figura 5.18 (b), indicando que a transferência da força vertical no topo do pilar passa a ocorrer pela região reforçada com as armaduras longitudinais. Porém, na região do consolo, a solução obtida é similar à anterior.

Na Figura 5.18 são apresentadas as soluções obtidas para dois valores de restrição de volume diferentes. Com a presença das regiões passivas, como parte do material que era distribuído anteriormente na região do pilar acima do consolo não é mais necessário, ocorre uma maior concentração de material nas demais regiões. Assim, na Figura 5.18 (c), o problema também foi solucionado com metade da fração de volume utilizada na solução da Figura 5.18 (b). Com isso, pode-se constatar que a biela de compressão que surgia na região do pilar abaixo do consolo não mais aparece, indicando que a transmissão dessa força de compressão é feita pela armadura do pilar e que seu surgimento na solução da Figura 5.18 (b) se deveu apenas ao excesso de material prescrito.

5.5.3.5. Caso 05: Regiões passivas com 1 restrição e 3 materiais

Neste caso, investiga-se o uso do Material 3, simulando um concreto com maior rigidez à tração, e considerando as mesmas duas regiões passivas do caso anterior. A definição da restrição de volume e as soluções obtidas são apresentadas na Figura 5.19.

Figura 5.19 - Consolo curto – Caso 5: (a) Definição da restrição de volume; (b) $g_1 = 30\%$; (c) $g_1 = 15\%$



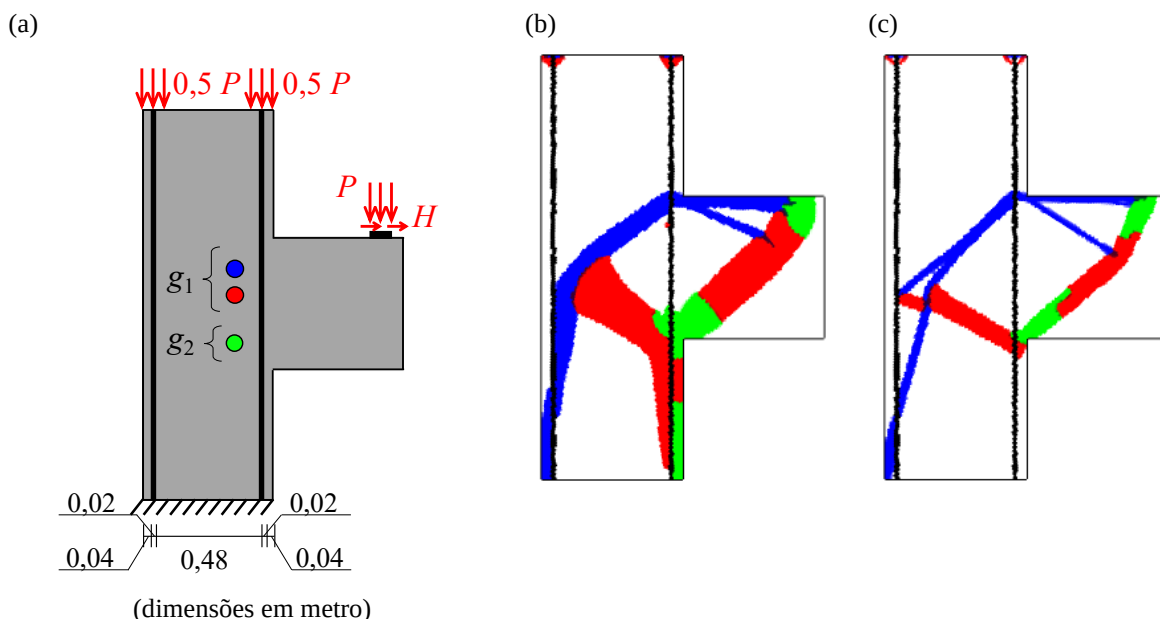
Na Figura 5.19, é interessante observar que como os Materiais 2 e 3 estão associados à mesma restrição de volume, o Material 3 prevalece em toda a região de compressão. Isso se dá pelo fato de que o Material 3 possui uma rigidez à tração mais elevada que o Material 2, fazendo com que o valor da energia de deformação específica calculada com este material seja maior que a calculada com o Material 2.

Logo, caso se tenha a intenção de que na solução obtida estejam presentes os Materiais 2 e 3, é preciso associar cada um deles a uma restrição de volume.

5.5.3.6. Caso 06: Regiões passivas com 2 restrições e 3 materiais

Neste caso, define-se uma restrição de volume associada ao Material 3 e uma restrição associada aos Materiais 1 e 2, conforme apresentado na Figura 5.20 (a). Os valores de fração de volume associados a cada uma das restrições são definidos de forma que a restrição de volume associada aos Materiais 1 e 2 seja igual a 5/6 da fração de volume total, g , e que a restrição de volume associada ao Material 3 seja igual a 1/6 da fração de volume total.

Figura 5.20 - Consolo curto – Caso 6: (a) Definição da restrição de volume; (b) $g = 30\%$; (c) $g = 15\%$



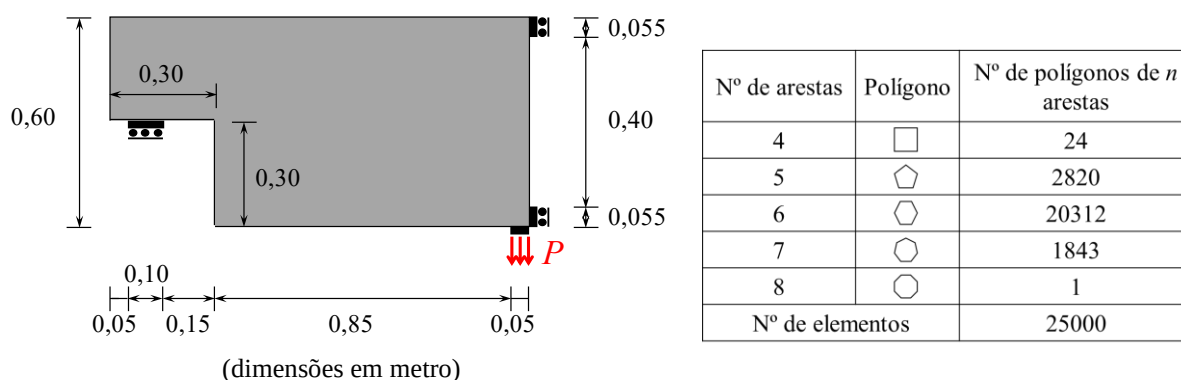
Assim como havia sido observado no Caso 03, na solução apresentada na Figura 5.17 (b), as soluções das Figura 5.20 (b) e (c) indicam que as regiões de preferência a se usar um concreto com maior rigidez à tração são nas regiões imediatamente abaixo da aplicação da carga e na base do consolo. Além disso, observa-se que seu uso não afeta o caminho de forças no interior da estrutura.

5.5.4. Exemplo 04: Dente de concreto

Neste exemplo é estudado um dente de concreto cuja geometria e condições de contorno são apresentadas na Figura 5.21. O valor da carga P é igual a 10 kN/m. O domínio é discretizado em uma malha de 25000 elementos finitos poligonais, cuja composição está indicada na Figura 5.21.

Foram utilizados os quatro materiais com parâmetros e cores identificadoras apresentados na Tabela 5.3. Como nenhum dos materiais candidatos é definido por um modelo constitutivo com limite de tensão, foi adotado o problema de otimização de maximização da energia potencial total estacionária, apresentado em (5.2).

Figura 5.21 – Exemplo 04: Geometria, condições de contorno e composição da malha de elementos finitos poligonais

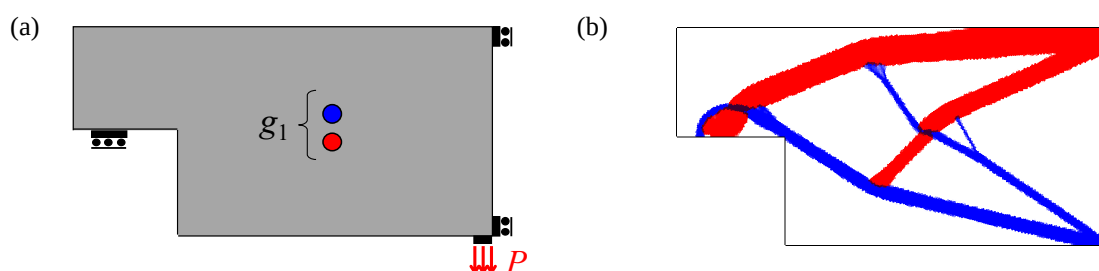


O raio inicial do filtro de densidade é igual a 0,02 m. A seguir são apresentadas as soluções obtidas para diferentes definições de restrição de volume.

5.5.4.1. Caso 01

Neste primeiro caso, define-se uma restrição de volume global associada aos Materiais 1 e 2, que representam o aço em tração e o concreto predominantemente em compressão, respectivamente. A fração de volume associada à restrição é igual a 30% do volume. A definição da restrição de volume é apresentada na Figura 5.22 (a) e a solução obtida é apresentada na Figura 5.22 (b).

Figura 5.22 - Exemplo 04 - Caso 01: (a) Definição da restrição de volume; (b) Solução topológica

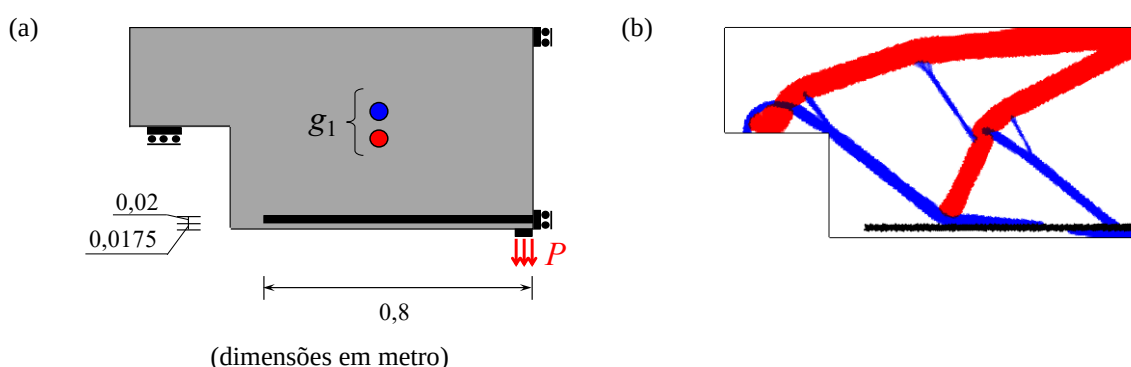


É interessante observar dois aspectos na solução da Figura 5.22 (b): a inclinação da biela comprimida e a inclinação do tirante na região do recorte do dente. Esta última, indica que o modelo de bielas e tirantes mais indicado para esta estrutura é aquele em que a armadura principal do tirante é posicionada inclinada na extremidade da viga próxima ao dente.

5.5.4.2. Caso 02

Neste caso foi considerada uma região passiva composta pelo Material 4, que representa o aço, na região inferior da viga, com o intuito de verificar a influência da armadura de flexão já existente na viga no caminho que as forças percorrem no interior do dente. Foi também considerada uma única restrição de volume global, associada aos Materiais 1 e 2, com uma fração de volume de 30% do volume do domínio estendido.

Figura 5.23 - Exemplo 04 - Caso 02: (a) Definição da restrição de volume (dimensões em metro); (b) Solução topológica

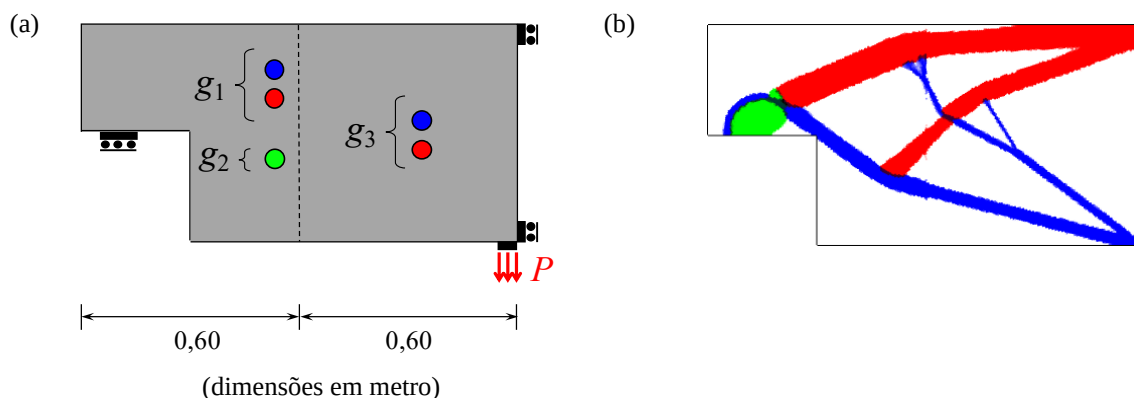


Comparando-se as soluções mostradas na Figura 5.23 (b) com a apresentada na Figura 5.22 (b), observa-se alguma influência da armadura de tração da viga no caminho de forças no domínio estendido. A armadura altera a posição da armadura na região próxima ao apoio da direita, trazendo-a para próximo da horizontal, fazendo com que aumente a inclinação da região tracionada na extremidade da viga próxima ao dente, que passa a ter uma inclinação de cerca de 45° . A topologia resultante é mais próxima às utilizadas nos modelos de bielas e tirantes para dentes de concreto, como o modelo de Schlaich e Schäfer (1991).

5.5.4.3. Caso 03

Este caso considera a utilização de um concreto com maior f_{ck} à tração na região próxima ao dente, o Material 3. As restrições de volume são definidas conforme a Figura 5.24 (a), com $g_1 = 25\%$; $g_2 = 5\%$ e $g_3 = 30\%$.

Figura 5.24 - Exemplo 04 - Caso 03: (a) Definição da restrição de volume; (b) Solução topológica



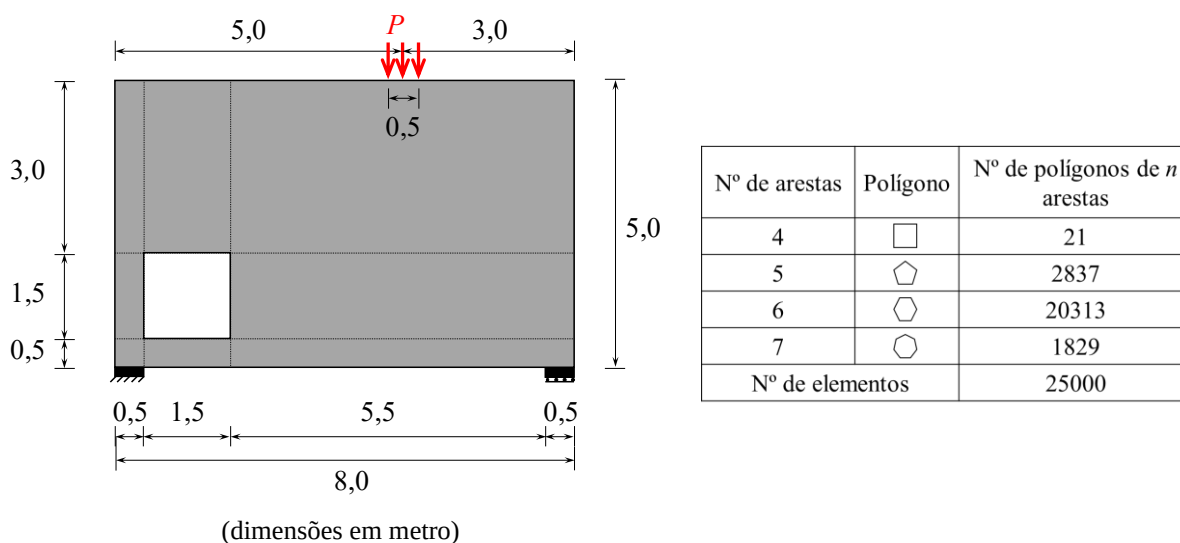
A solução da Figura 5.24 (b) indica que o uso de um material com maior rigidez à tração deve ser feito na região do apoio do dente, reduzindo a concentração de tensões perpendiculares à biela nessa região. Além disso, é interessante observar que seu uso não influenciou no caminho das forças no interior da estrutura.

5.5.5. Exemplo 05: Viga parede com furo

Neste exemplo é estudada uma viga parede com um furo na região próxima a um de seus apoios. A geometria e as condições de contorno são apresentadas na Figura 5.25. O domínio é discretizado em uma malha de 25000 elementos finitos poligonais. O raio inicial do filtro de densidade é igual a 0,2 m. A fração de volume adotada foi igual a 30% do volume do domínio estendido.

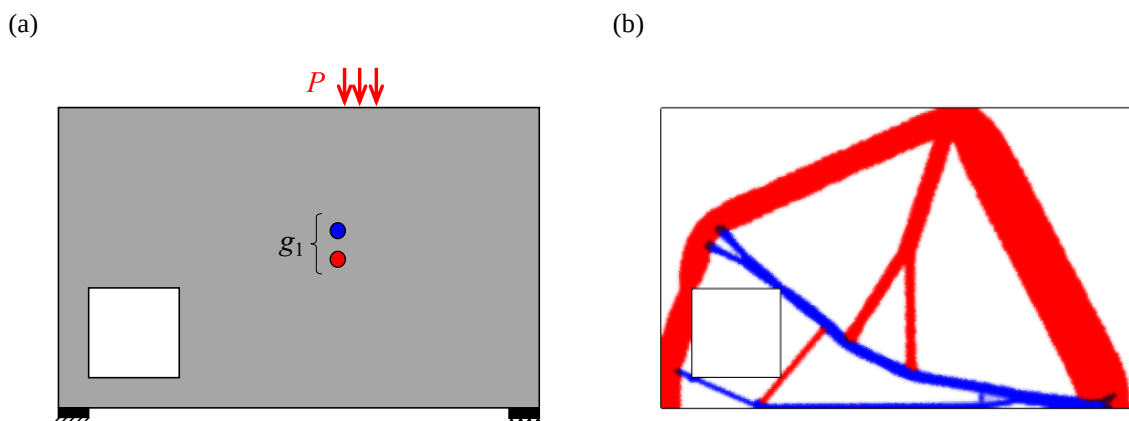
Foram utilizados os materiais com parâmetros e cores identificadoras apresentados na Tabela 5.3. Como nenhum dos materiais candidatos é definido por um modelo constitutivo com limite de tensão, foi adotado o problema de otimização de maximização da energia potencial total estacionária, apresentado em (5.2).

Figura 5.25 – Exemplo 05: Geometria, condições de contorno e composição da malha de elementos finitos poligonais



A Figura 5.26 apresenta a definição da restrição de volume e a solução obtida.

Figura 5.26 – Exemplo 05: (a) Definição da restrição de volume; (b) Solução topológica



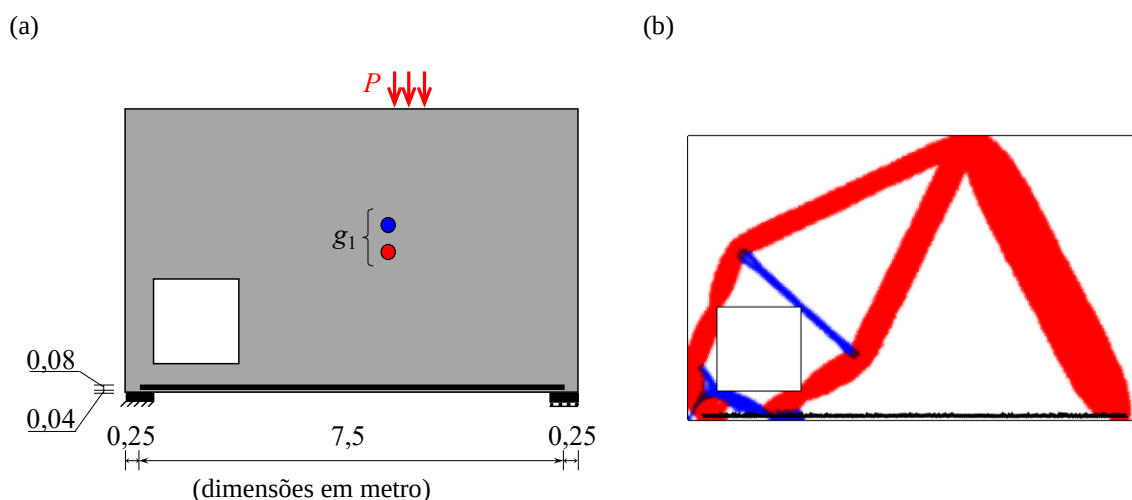
É interessante observar a posição dos tirantes na solução apresentada na Figura 5.26. Destaca-se a inclinação dos tirantes na região do furo, o que indica a necessidade de um reforço na região do furo com o intuito de combater as tensões de tração nos cantos do mesmo.

É importante, também, comparar a solução com dois materiais bilineares apresentada na Figura 5.26 com a solução apresentada no Capítulo 3 com um material bilinear apresentada na Figura 3.13. Verifica-se que ao adotar dois materiais a solução obtida foi diferente, o que indica que a proposta feita no Capítulo 3, de usar um único material bilinear fictício que em tração

possui o módulo de elasticidade do aço e em compressão o módulo de elasticidade do concreto, deve ser evitada.

O problema também foi solucionado considerando uma região passiva abaixo do furo, com intuito de verificar a influência da armadura de flexão já existente na viga na definição dos caminhos das forças no interior da estrutura. A definição da região passiva e a solução obtida são apresentadas na Figura 5.27.

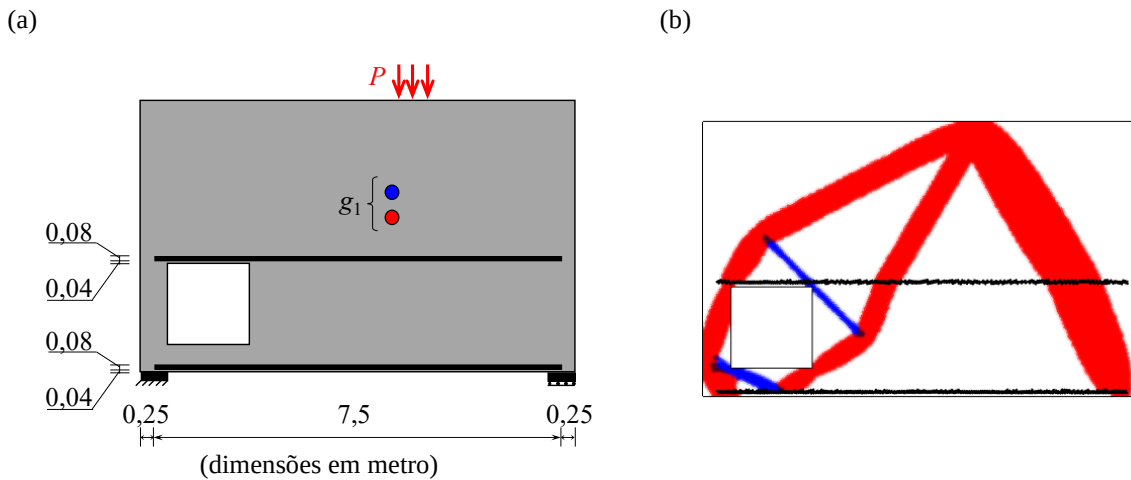
Figura 5.27 - Exemplo 05: (a) Definição da restrição de volume; (b) Solução topológica



É interessante observar na solução da Figura 5.27 (b) que com a presença da região passiva abaixo do furo foi obtida uma topologia mais simplificada. Merece ser destacado, novamente, as posições dos tirantes na região do furo. A solução obtida indica que é preciso uma armadura inclinada na região abaixo do furo com o intuito de combater as tensões de tração no canto. Também é possível observar a necessidade de uma armadura na região superior do furo, com o mesmo objetivo de combater as tensões de tração que surgem no canto do furo.

O problema também foi solucionado considerando uma região passiva acima do furo. Haja vista que é comum haver barras de aço localizadas nesta região.

Figura 5.28 - Exemplo 05: (a) Definição da restrição de volume; (b) Solução topológica

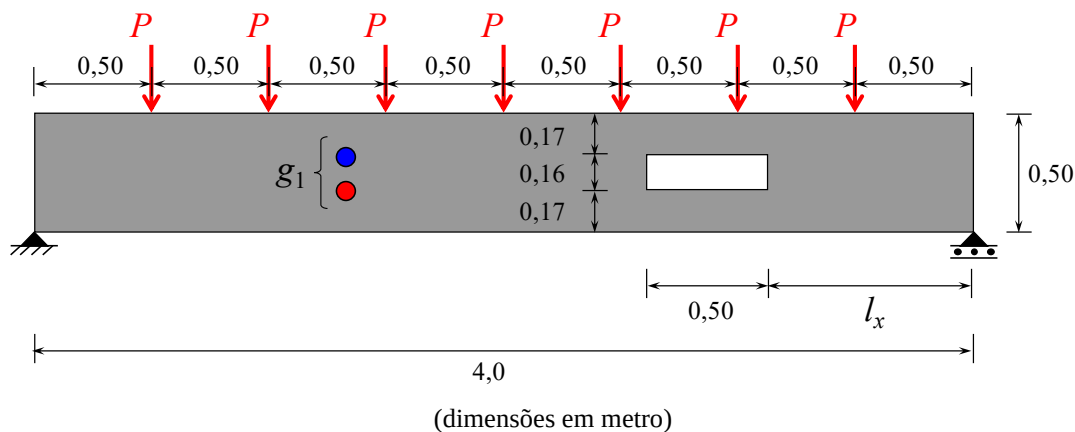


A solução obtida e apresentada na Figura 5.28 indica que a região passiva posicionada acima do furo não promoveu alterações no caminho de forças no interior da viga.

5.5.6. Exemplo 06: Viga biapoiada com abertura

Neste exemplo é estudada uma viga biapoiada sem e com a presença de uma abertura, em diferentes posições. A Figura 6.31 apresenta a geometria do problema, as condições de contorno adotadas e a definição da restrição de volume do problema. O domínio contínuo foi discretizado em uma malha composta por 20000 elementos finitos poligonais. O raio inicial do filtro de densidade é igual a 0,02 m. A fração de volume adotada foi igual a 50% do volume do domínio estendido. O valor da carga P é igual a 10 kN.

Figura 5.29 - Viga biapoiada com abertura: geometria e condições de contorno

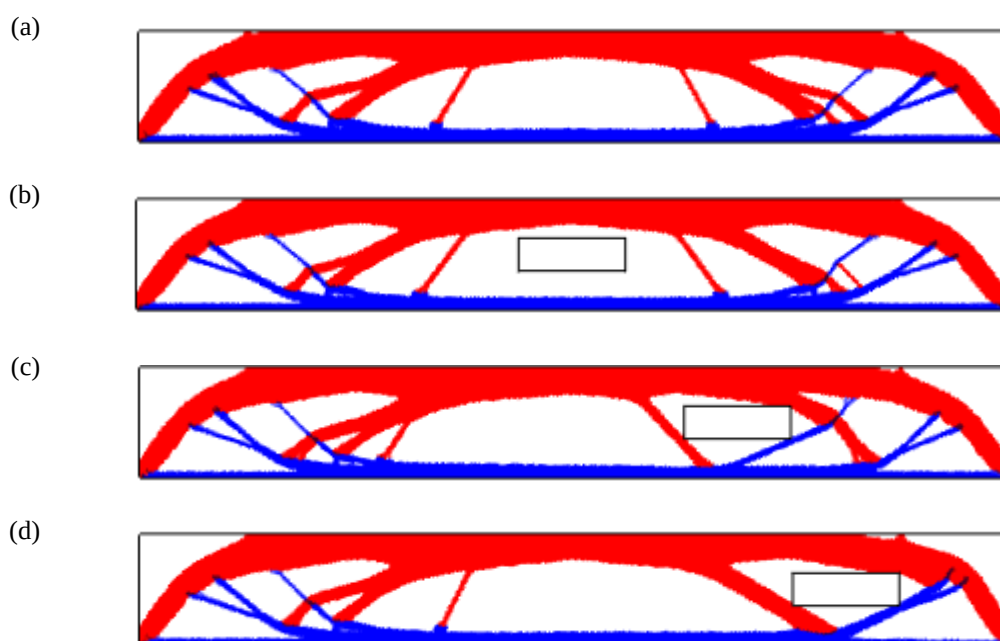


Foram utilizados dois materiais com parâmetros e cores identificadoras apresentados na Tabela 5.3. Como nenhum dos materiais candidatos é definido por um modelo constitutivo com

limite de tensão, foi adotado o problema de otimização de maximização da energia potencial total estacionária, apresentado em (5.2).

O problema foi solucionado sem e com a presença da abertura em três posições distintas, com l_x igual a 1,75 m; 1,0 m e 0,5 m. As soluções obtidas são apresentadas na Figura 5.30.

Figura 5.30 -Viga biapoiada com abertura - soluções obtidas: (a) Sem presença de abertura; (b) Com abertura e $l_x = 1,75$ m; (c) Com abertura e $l_x = 1,0$ m; (d) Com abertura e $l_x = 0,5$ m



As soluções apresentadas na Figura 5.30 mostram que para uma viga biapoiada sujeita a um carregamento transversal uniforme a posição ideal de se inserir uma abertura é no meio do vão da viga, uma vez que dessa forma os caminhos de força no interior da estrutura não sofrem alterações significativas. Porém, à medida que a abertura se aproxima do apoio, observa-se que as modificações nos caminhos de força tornam-se mais significativos.

Um aspecto importante de ser destacado neste exemplo é a complexidade dos caminhos de força obtidos. Essa complexidade pode ser um fato complicador caso haja a intenção de usar a representação dos caminhos de força no interior da estrutura obtidos via otimização topológica como base para a idealização de modelos para dimensionamento de estruturas de concreto armado. Por isso, no Capítulo 6 é apresentado e discutido o uso da formulação híbrida para obtenção dos caminhos de força no interior de elementos de concreto armado.

5.5.7. Exemplo 07: Viga parede com dois furos

Neste exemplo é estudada uma viga parede com a presença de dois furos. A Figura 5.31 apresenta a geometria do problema e as condições de contorno adotadas. O domínio contínuo foi discretizado em uma malha estruturada de elementos finitos quadrados de dimensão igual a 0,01. O raio inicial do filtro de densidade é igual a 0,02 m. A fração de volume adotada foi igual a 45%. O valor da carga P é igual a 200 kN/m.

Os materiais utilizados, seus parâmetros e as cores identificadoras são apresentados na Tabela 5.4.

Figura 5.31 - Viga parede com dois furos: Geometria e condições de contorno

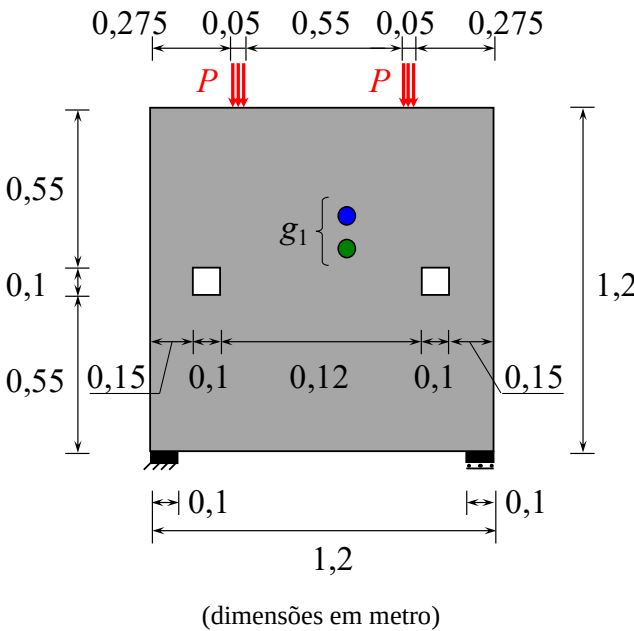


Tabela 5.4 – Identificação e parâmetros dos materiais

Material	Modelo	Cor	E_t (MPa)	E_c (MPa)	ν_t	ν_c
1	Bilinear	●	210000,0	2100,0	0,30	0,003
Material	Modelo	Cor	E_0 (MPa)	ν	σ_y (MPa)	ϵ_{ref}
2	Assintótico	●	28000	0,20	16	0,0004

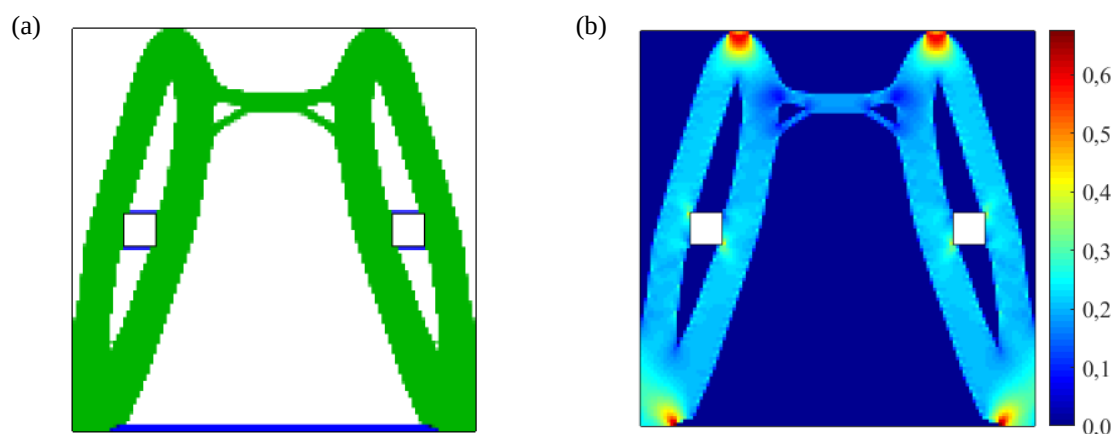
O Material 1 representa a armadura de aço tracionada e, por isso foi estabelecido um valor reduzido de rigidez à compressão, a fim de evitar que ele seja alocado em regiões onde o de estado de tensão de compressão seja predominante; e o Material 2 representa o concreto. Embora o Material 2 possua um mesmo comportamento em tração e em compressão, espera-se

que ele seja alocado nas regiões de compressão por possuir uma rigidez mais elevada (no trecho inicial, antes de atingir a região assintótica) que o Material 1.

Como o material candidato 2 é definido com o modelo constitutivo com limite de tensão, cuja formulação foi apresentada no Capítulo 4 deste trabalho, é adotado como problema de otimização a maximização da energia interna de deformação, apresentado na equação (5.3).

Para solução da equação de equilíbrio, adota-se uma energia prescrita, C_0 , igual a $2 \cdot 10^{-6}$ MPa. A solução obtida é apresentada na Figura 5.32.

Figura 5.32 - Viga parede com dois furos: (a) Solução topológica; (b) Tensão equivalente de von Mises normalizada



Observa-se na solução da Figura 5.32 que a idealização feita na definição dos materiais candidatos é atendida. O Material 1 está alocado nos membros onde a tensão de tração é predominante e o Material 2 está alocado nos membros onde a tensão de compressão é predominante. Assim, tem-se que é possível, utilizando um material bilinear e um material com limite de tensão, com mesmo comportamento em tração e em compressão, obter uma representação dos caminhos de força no interior de estruturas de concreto armado.

No campo de tensões equivalentes de von Mises normalizadas é possível identificar que as regiões de maiores valores de tensão são as regiões logo abaixo da aplicação da carga e nas regiões dos apoios próximas a mudança de material do tirante inferior para a biela. É importante ressaltar que para realizar a normalização do campo de tensões equivalentes de von Mises, as tensões calculadas foram divididas pelo limite de tensão associado ao material que possui maior densidade associada. Como o material bilinear não possui um limite de tensão, foi fornecido um valor numérico alto, para possibilitar a realização da plotagem.

Por fim, destaca-se que o ideal, seguindo a proposta deste exemplo, seria utilizar um modelo elástico não-linear que se aproxime do critério de Drucker-Prager, em vez do critério de von Mises, com o intuito de ser mais fiel ao comportamento do concreto.

5.5.8. Exemplo 08: Viga apoiada em três apoios rígidos

Neste exemplo é estudada uma viga parede com a presença de dois furos. A Figura 5.31 apresenta a geometria do problema e as condições de contorno adotadas. O domínio é discretizado em uma malha regular de 120 x 60 elementos quadrados. O raio inicial do filtro de densidade é igual a 0,4167 m. São definidas duas restrições de volume, cada uma associada a um dos materiais, definidos na Tabela 5.5, com $g_1 = g_2 = 15\%$.

Figura 5.33 – Viga apoiada em três apoios rígidos: geometria, condições de contorno e definição das restrições de volume

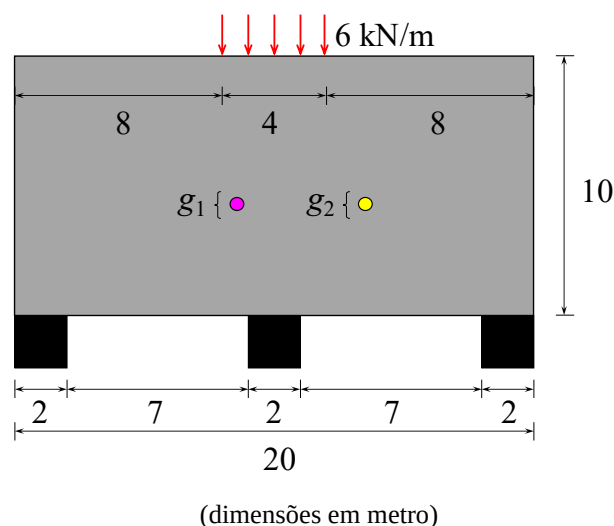


Tabela 5.5 – Identificação e parâmetros dos materiais

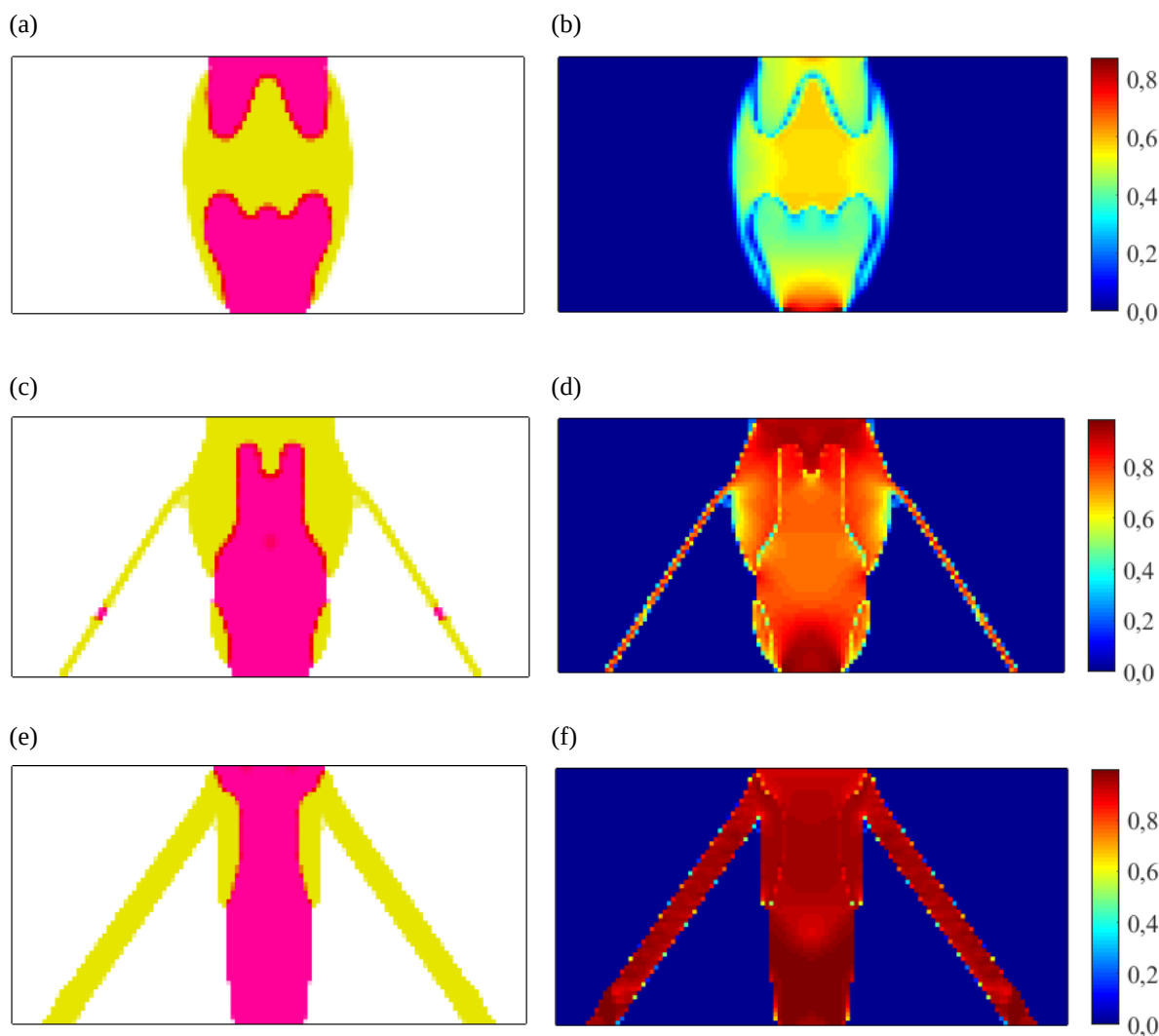
Material	Modelo	Cor	E_0 (kPa)	ν	σ_y (kPa)	ϵ_{ref}
1	Assintótico	●	30000	0,20	240	0,0005
2	Assintótico	●	30000	0,20	120	0,0005

A diferença entre os materiais candidatos 1 e 2, apresentados na Tabela 5.5, é que o Material 2 possui uma tensão de escoamento com valor igual a metade da tensão do Material 1.

Como os dois materiais candidatos são definidos com um modelo constitutivo com limite de tensão, adota-se como problema de otimização a maximização da energia interna de

deformação, apresentado na equação (5.3). As soluções obtidas são apresentadas na Figura 5.34, para três valores de energia prescrita: $C_0 = 0,1$ kPa, $C_0 = 0,5$ kPa e $C_0 = 3$ kPa.

Figura 5.34 - Viga apoiada em três apoios rígidos: (a) Solução topológica obtida com $C_0 = 0,1$ kPa; (b) Tensões equivalentes de von Mises normalizadas com $C_0 = 0,1$ kPa; (c) Solução topológica obtida com $C_0 = 0,5$ kPa; (d) Tensões equivalentes de von Mises normalizadas com $C_0 = 0,5$ kPa; (e) Solução topológica obtida com $C_0 = 3$ kPa; (f) Tensões equivalentes de von Mises normalizadas com $C_0 = 3$ kPa;



A solução apresentada nas Figura 5.34 (a) e (b) mostram que com um valor de energia prescrita, C_0 , igual a 0,1 kPa a região onde os valores de tensão são mais elevados é na região próxima ao apoio central. Além disso, é interessante observar que o Material 1, que possui maior limite de tensão, está alocado nas proximidades da aplicação do carregamento e do apoio central, que são as regiões que ocorrem os maiores valores de tensão. Verifica-se, também, que na região central da topologia formada pelo Material 2 os valores de tensão equivalente de von Mises

normalizados são mais elevados que nas regiões próximas ao centro formadas pelo Material 1. Isso ocorre pelo fato do limite de tensão do Material 2 ser a metade do limite do Material 1.

Com o aumento do valor de energia prescrita de 0,1 kPa para 0,5 kPa, a solução obtida, apresentada na Figura 5.34 (c), possui uma topologia diferente. Como o material na região próximo ao apoio central atingiu valores de tensão mais próximos do limite imposto, surgiram membros na solução direcionados aos apoios laterais, compostos pelo Material 2.

Por fim, com um valor de energia prescrita igual a 3 kPa, toda solução encontra-se com uma tensão próxima à tensão limite, conforme apresentado nas Figura 5.34 (e) e (f). Além disso, observa-se também que o Material 2, que possui uma menor tensão limite, é alocado nos membros direcionados aos apoios laterais, enquanto o Material 1, que possui maior tensão limite, é alocado no membro central da topologia obtida, que consiste na região de maiores esforços e tensões.

CAPÍTULO 6

FORMULAÇÃO HÍBRIDA

Neste capítulo apresenta a formulação híbrida do problema de otimização topológica. A presente proposta se baseia na formulação proposta por Gaynor, Guest e Moen (2013) com o intuito de obter soluções que representem os caminhos de forças no interior de estruturas de concreto armado para auxiliar projetistas na idealização de modelos de bielas e tirantes.

Na formulação híbrida, a malha de elementos finitos do problema possui elementos de barra e elementos contínuos. Aos elementos de barras é associado um material bilinear com módulo de elasticidade mais elevado à tração e reduzido à compressão, enquanto aos elementos contínuos é associado um material bilinear com módulo de elasticidade mais elevado à compressão e reduzido à tração. Assim, tem-se uma solução em que os membros tracionados serão, preferencialmente, elementos de barra, representando as armaduras de aço, e os membros comprimidos serão elementos contínuos, representando os caminhos de força de compressão no interior do concreto.

Como a formulação híbrida envolve alguns conceitos relacionados ao método da *Ground Structure*, recomenda-se consultar o Apêndice D deste trabalho para se familiarizar com alguns conceitos básicos associados ao mesmo.

O problema de otimização abordado neste capítulo é a maximização da energia potencial total estacionária é apresentado em (6.1).

Obter: $\mathbf{z} = \{\mathbf{z}_c, \mathbf{z}_b\}$

Que minimiza: $f(\mathbf{z}_c, \mathbf{z}_b, \mathbf{U}(\mathbf{z})) = -\Pi_{min}(\mathbf{z}_c, \mathbf{z}_b, \mathbf{U}(\mathbf{z}))$

Tal que: $g(\mathbf{z}) = \frac{\mathbf{A}^T m_V(\mathbf{P} \mathbf{z}_c)}{\mathbf{A}^T \mathbf{I}} + \frac{\mathbf{L}^T \mathbf{a}}{\mathbf{A}^T \mathbf{I}} - V_{max} \leq 0$ (6.1)

$$0 < z_{min} \leq z_i \leq z_{max}, \quad i = 1, \dots, N_c + N_b$$

Com: $\mathbf{F}_{int}(\mathbf{z}_c, \mathbf{z}_b, \mathbf{U}(\mathbf{z})) = \mathbf{F}_{ext}$

Onde:

$$\mathbf{a} = A_{max} \mathbf{z}_b \quad (6.2)$$

Tem-se que $\mathbf{z}$ corresponde ao vetor de variáveis de projeto; $\mathbf{z}_c$ corresponde ao vetor de variáveis de projeto associadas aos elementos contínuos; $\mathbf{z}_b$ corresponde ao vetor com os valores das áreas normalizadas das barras; $\mathbf{U}$ consiste no vetor de deslocamentos nodais; Π_{min} é o potencial de energia total estacionária; $\mathbf{A}$ corresponde ao vetor com as áreas dos elementos contínuos; $\mathbf{a}$ ao vetor com as áreas dos elementos de barra; m_V consiste na função de interpolação do volume do elemento contínuo; $\mathbf{P}$ a matriz com as componentes da operação do filtro de densidade; $\mathbf{L}$ corresponde ao vetor com o comprimento das barras; V_{max} consiste na prescrição da fração de volume do domínio estendido; z_{min} consiste no limite inferior das variáveis de projeto; z_{max} consiste no limite superior das variáveis de projeto; N_c ao número elementos contínuos; N_b ao número de elementos de barra; $\mathbf{F}_{int}$ consiste no vetor de forças internas nodais e $\mathbf{F}_{ext}$ corresponde ao vetor de forças externas nodais; e A_{max} ao valor máximo de área da seção transversal das barras.

A função objetivo é a energia potencial total estacionária, calculada considerando a contribuição da energia interna de deformação dos elementos contínuos e dos elementos de barra:

$$\Pi_{min}(\mathbf{z}_c, \mathbf{z}_b, \mathbf{U}(\mathbf{z})) = \sum_{l=1}^{N_c} \int_{\Omega_l} E_l \Psi_{c,0}(\mathbf{u}_l, \mathbf{x}) d\mathbf{x} + \sum_{j=1}^{N_b} a_j L_j \Psi_{b,0}(\mathbf{u}_j) - \mathbf{F}_{ext} \cdot \mathbf{U} \quad (6.3)$$

Sendo, $E_l = m_E(\gamma_l)$, onde m_E é a função de interpolação do parâmetro de rigidez (ex.: modelo SIMP); $\mathbf{u}_l$ o vetor de deslocamentos associado ao elemento l ; $\mathbf{u}_j$ o vetor de deslocamentos associado à barra j ; $\Psi_{c,0}$ é a função de energia de deformação específica do material que compõe o elemento contínuo; $\Psi_{b,0}$ é a função de energia de deformação específica do material que compõe a barra; a_j é a área da seção transversal da barra j ; L_j é o comprimento da barra j ; N_c é o número de elementos contínuos e N_b é o número de barras.

6.1. ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

É preciso definir as expressões para o cálculo das sensibilidades da função objetivo e da restrição de volume em relação às componentes dos vetores $\mathbf{z}_c$ e $\mathbf{z}_b$. Primeiro define-se a

sensibilidade da função objetivo em relação às variáveis de projeto. Em relação às componentes de $\mathbf{z}_c$:

$$\frac{\partial f(\mathbf{z}_c, \mathbf{z}_b, \mathbf{U})}{\partial z_k^c} = \sum_{l=1}^{N_c} \left(\frac{\partial f(\mathbf{z}_c, \mathbf{z}_b, \mathbf{U})}{\partial E_l} \frac{\partial E_l}{\partial z_k^c} \right) \quad (6.4)$$

Com:

$$\frac{\partial f(\mathbf{z}_c, \mathbf{z}_b, \mathbf{U})}{\partial E_l} = - \frac{\partial \Pi_{min}(\mathbf{z}_c, \mathbf{z}_b, \mathbf{U})}{\partial E_l} - \frac{\partial \Pi_{min}(\mathbf{z}_c, \mathbf{z}_b, \mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial E_l} \quad (6.5)$$

Devido à condição de equilíbrio, a derivada da energia potencial total estacionária em relação ao vetor de deslocamentos é nula, portanto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\mathbf{z}_c, \mathbf{z}_b, \mathbf{U})}{\partial E_l} &= - \frac{\partial}{\partial E_l} \left[\sum_{l=1}^{N_c} \int_{\Omega_l} E_l \Psi_{c,0}(\mathbf{u}_l, \mathbf{x}) d\mathbf{x} + \sum_{j=1}^{N_b} a_j L_j \Psi_{b,0}(\mathbf{u}_j) - \mathbf{F}_{ext} \cdot \mathbf{U} \right] \\ &= - \int_{\Omega_l} \Psi_{c,0}(\mathbf{u}_l, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (6.6)$$

Em relação às componentes do vetor $\mathbf{z}_b$:

$$\frac{\partial f(\mathbf{z}_c, \mathbf{z}_b, \mathbf{U})}{\partial z_k^b} = \frac{\partial f(\mathbf{z}_c, \mathbf{z}_b, \mathbf{U})}{\partial a_k} \frac{\partial a_k}{\partial z_k^b} \quad (6.7)$$

O primeiro termo do lado direito da igualdade (6.7) é:

$$\frac{\partial f(\mathbf{z}_c, \mathbf{z}_b, \mathbf{U})}{\partial a_k} = - \frac{\partial \Pi_{min}(\mathbf{z}_c, \mathbf{z}_b, \mathbf{U})}{\partial a_k} - \frac{\partial \Pi_{min}(\mathbf{z}_c, \mathbf{z}_b, \mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial a_k} \quad (6.8)$$

Pelo mesmo motivo já mencionado, a segunda parcela do lado direito da igualdade será nula, logo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\mathbf{z}_c, \mathbf{z}_b, \mathbf{U})}{\partial a_k} &= - \frac{\partial}{\partial a_k} \left[\sum_{l=1}^{N_c} \int_{\Omega_l} E_l \Psi_{c,0}(\mathbf{u}_l, \mathbf{x}) d\mathbf{x} + \sum_{j=1}^{N_b} a_j L_j \Psi_{b,0}(\mathbf{u}_j) - \mathbf{F}_{ext} \cdot \mathbf{U} \right] \\ &= - L_j \Psi_{b,0}(\mathbf{u}_j) \end{aligned} \quad (6.9)$$

O segundo termo do lado direito da igualdade (6.7) é calculado considerando a relação definida em (6.2). Logo, a sensibilidade da função objetivo em relação às componentes de $\mathbf{z}_b$ são:

$$\frac{\partial f(\mathbf{z}_c, \mathbf{z}_b, \mathbf{U})}{\partial z_k^b} = -A_{\max} L_j \Psi_{b,0}(\mathbf{u}_j) \quad (6.10)$$

Observe que a sensibilidade da função objetivo em relação a ambas as variáveis de projeto são estritamente não-positivas.

A sensibilidade da restrição de volume em relação às componentes de $\mathbf{z}_c$ são:

$$\frac{\partial g(\mathbf{z}_c, \mathbf{z}_b)}{\partial z_k^c} = \sum_{l=1}^{N_c} \left(\frac{\partial g(\mathbf{z}_c, \mathbf{z}_b)}{\partial V_l} \frac{\partial V_l}{\partial z_k^c} \right) \quad (6.11)$$

Com:

$$\frac{\partial g(\mathbf{z}_c, \mathbf{z}_b)}{\partial V_l} = \frac{A_l}{\mathbf{A}^T \mathbf{I}} \quad (6.12)$$

A sensibilidade da restrição de volume em relação às componentes de $\mathbf{z}_b$ são:

$$\frac{\partial g(\mathbf{z}_c, \mathbf{z}_b, \mathbf{U})}{\partial z_k^b} = \frac{\partial g(\mathbf{z}_c, \mathbf{z}_b, \mathbf{U})}{\partial a_k} \frac{\partial a_k}{\partial z_k^b} = \frac{L_k}{\mathbf{A}^T \mathbf{I}} A_{\max} \quad (6.13)$$

Como a sensibilidade da restrição de volume em relação a ambas as variáveis de projeto são positivas e a sensibilidade da função objetivo em relação a elas são estritamente não-positivas, é possível adotar o OC como esquema de atualização das variáveis de projeto. O método é apresentado no Apêndice A deste trabalho.

6.2. EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

Para obter as equações de equilíbrio do problema, aplica-se a condição de estacionariedade à energia potencial total do sistema, apresentada em (6.3). Obtém-se assim:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{U}} \left[\sum_{l=1}^{N_c} \int_{\Omega_l} E_l \Psi_{c,0}(\mathbf{u}_l, \mathbf{x}) d\mathbf{x} + \sum_{j=1}^{N_b} a_j L_j \Psi_{b,0}(\mathbf{u}_j) - \mathbf{F}_{ext} \cdot \mathbf{U} \right] = \mathbf{0} \quad (6.14)$$

$$\sum_{l=1}^{N_c} \int_{\Omega_l} E_l \frac{\partial \Psi_{c,0}(\mathbf{u}_l, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{u}_l} d\mathbf{x} + \sum_{j=1}^{N_b} a_j L_j \frac{\partial \Psi_{b,0}(\mathbf{u}_j)}{\partial \mathbf{u}_j} - \mathbf{F}_{ext} = \mathbf{0} \quad (6.15)$$

Assim como havia sido definido em (2.42), tem-se:

$$\frac{\partial \Psi_{c,0}(\mathbf{u}_l, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{u}_l} = \boldsymbol{\sigma}_{c,l}(\mathbf{u}_l, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{B}_l(\mathbf{x}) \quad (6.16)$$

Onde, $\boldsymbol{\sigma}_{c,l}$ é o tensor de tensões de Cauchy do elemento contínuo l e $\mathbf{B}_l$ é a matriz de compatibilidade cinemática do elemento contínuo l .

E no Apêndice D, é definido:

$$\frac{\partial \Psi_{b,0}(\mathbf{u}_j)}{\partial \mathbf{u}_j} = \sigma_{b,j}(\mathbf{u}_j) \frac{\mathbf{R}_j}{L_j} \quad (6.17)$$

Onde $\sigma_{b,j}$ é a tensão axial de Cauchy da barra j e $\mathbf{R}_j$ o vetor de decomposição da força axial da barra em componentes cartesianas em cada nó da barra. Portanto, tem-se:

$$\sum_{l=1}^{N_c} E_l \int_{\Omega_l} \boldsymbol{\sigma}_{c,l}(\mathbf{u}_l, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{B}_l(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \sum_{j=1}^{N_b} a_j L_j \left(\sigma_{b,j}(\mathbf{u}_j) \frac{\mathbf{R}_j}{L_j} \right) - \mathbf{F}_{ext} = \mathbf{0} \quad (6.18)$$

$$\mathbf{F}_{int}(\mathbf{z}_c, \mathbf{z}_b, \mathbf{U}(\mathbf{z})) = \mathbf{F}_{ext} \quad (6.19)$$

Onde:

$$\mathbf{F}_{int}(\mathbf{z}_c, \mathbf{z}_b, \mathbf{U}(\mathbf{z})) = \sum_{l=1}^{N_c} E_l \int_{\Omega_l} \boldsymbol{\sigma}_{c,l}(\mathbf{u}_l, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{B}_l(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \sum_{j=1}^{N_b} a_j \sigma_{b,j}(\mathbf{u}_j) \mathbf{R}_j \quad (6.20)$$

Na equação (6.20), tem-se a definição do vetor de forças internas nodais. A primeira parcela do lado direito da igualdade corresponde à contribuição as forças internas dos elementos contínuos, enquanto a segunda parcela corresponde à contribuição dos elementos de barra. Além disso, é importante ressaltar que os somatórios na equação (6.20) representam um processo de montagem do vetor de forças internas da estrutura a partir da contribuição dos vetores de cada elemento.

Na formulação híbrida, é importante que sejam adotados materiais com diferentes rigidezes em tração e em compressão a fim de que as regiões de compressão sejam representadas pelo concreto, como elementos contínuos, e as regiões de tração sejam representados pelos tirantes, com os elementos de barra. Nos trabalhos de Gaynor, Guest e Moen (2013) e no de Oliveira (2021) foi utilizado o modelo constitutivo bilinear ortotrópico proposto por Darwin e Pecknold (1974). Ambos os trabalhos também solucionam o sistema de equações de equilíbrio de forma iterativa utilizando uma relação de equilíbrio secante, e não uma relação tangente como no método de Newton-Raphson. Neste trabalho será utilizado o modelo constitutivo bilinear isotrópico apresentado no item 3.2.1, em vez do modelo bilinear ortotrópico. Será discutido em um exemplo adiante que o modelo utilizado é capaz de representar bem o comportamento idealizado para o concreto, apesar da consideração do comportamento isotrópico.

Como será utilizado o método de Newton-Raphson para solucionar o sistema de equações de equilíbrio, é preciso definir a matriz de rigidez tangente do sistema, a qual é obtida a partir da derivada do vetor de forças internas, (6.20), em relação ao vetor de deslocamentos:

$$\mathbf{K}_t(\mathbf{z}_c, \mathbf{z}_b, \mathbf{U}(\mathbf{z})) = \sum_{l=1}^{N_c} E_l \int_{\Omega_l} \mathbf{B}_l(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{c,l}(\mathbf{u}_l, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{u}_l} d\mathbf{x} + \sum_{j=1}^{N_b} a_j \frac{\partial \sigma_{b,j}(\mathbf{u}_j)}{\partial \mathbf{u}_j} \mathbf{R}_j \quad (6.21)$$

Sendo:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{c,l}(\mathbf{u}_l, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{u}_l} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{c,l}(\mathbf{u}_l, \mathbf{x})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_l(\mathbf{u}_l, \mathbf{x})} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_l(\mathbf{u}_l, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{u}_l} = \mathbf{D}^{tan}(\mathbf{u}_l, \mathbf{x}) \mathbf{B}_l(\mathbf{x}) \quad (6.22)$$

$$\frac{\partial \sigma_{b,j}(\mathbf{u}_j)}{\partial \mathbf{u}_j} = \frac{\partial \sigma_{b,j}(\mathbf{u}_j)}{\partial \varepsilon_j(\mathbf{u}_j)} \frac{\partial \varepsilon_j(\mathbf{u}_j)}{\partial \mathbf{u}_j} = E_{T,j}(\mathbf{u}_j) \frac{\mathbf{R}_j}{L_j} \quad (6.23)$$

Onde, $\boldsymbol{\varepsilon}_l$ é o vetor de deformações do elemento contínuo l ; $\mathbf{D}^{tan}$ é a matriz constitutiva tangente associada do elemento contínuo; $E_{T,j}$ é o módulo de elasticidade tangente do elemento de barra j .

Por fim, chega-se a:

$$\mathbf{K}_t(\mathbf{z}_c, \mathbf{z}_b, \mathbf{U}(\mathbf{z})) = \sum_{l=1}^{N_c} E_l \int_{\Omega_l} \mathbf{B}_l(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{D}^{tan}(\mathbf{u}_l, \mathbf{x}) \mathbf{B}_l(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \sum_{j=1}^{N_b} \frac{a_j E_{T,j}(\mathbf{u}_j)}{L_j} \mathbf{R}_j^T \mathbf{R}_j \quad (6.24)$$

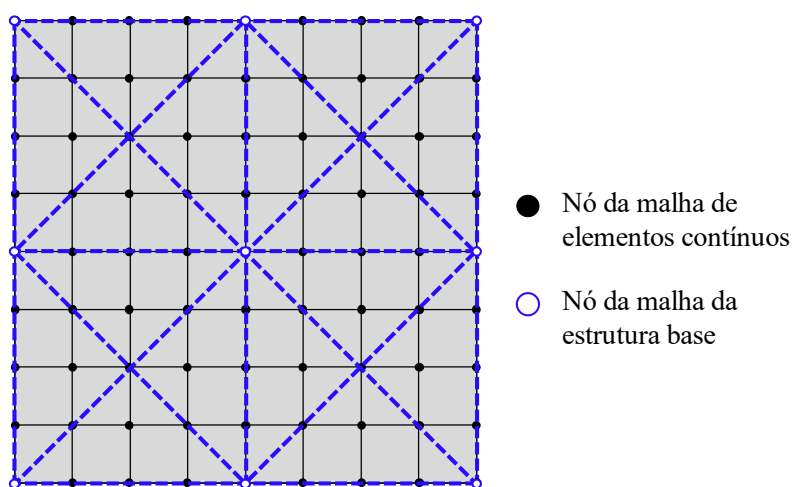
Assim como para o vetor de forças internas, a primeira parcela do lado direito da igualdade consiste na contribuição da rigidez dos elementos contínuos e a segunda parcela consiste na contribuição da rigidez dos elementos de barra.

6.3. MALHA HÍBRIDA UTILIZANDO ELEMENTOS POLIGONAIS

Para haver uma correta transferência de esforços dos elementos de barra para os elementos contínuos, e vice-versa, a alternativa mais simples é que os nós que definem as barras sejam os mesmos nós da malha de elementos contínuos. Os nós sendo, os graus de liberdade também serão os mesmos, e, conseqüentemente, a contribuição de ambos será considerada na matriz de rigidez do sistema e no vetor de forças internas.

Caso seja utilizada uma malha regular de elementos quadrangulares, essa compatibilização entre os nós é facilmente feita a partir da definição da partição do domínio de forma apropriada, conforme apresentado na Figura 6.1.

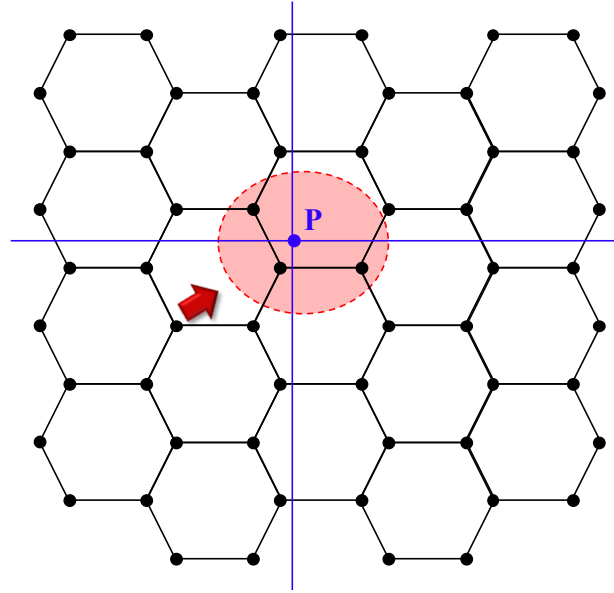
Figura 6.1 - Malha híbrida formada por elementos quadriláteros



Fonte: Adaptado de Gaynor, Guest e Moen (2013)

Contudo, caso sejam utilizados elementos contínuos poligonais, essa compatibilização entre os nós das barras e os nós dos elementos contínuos torna-se um problema. Isso se dá pelo fato de que a geração da malha de elementos finitos poligonais parte de um conjunto de pontos, denominados sementes, gerados aleatoriamente no interior do domínio (TALISCHI *et al.*, 2012b). A Figura 6.2 ilustra essa patologia.

Figura 6.2 - Patologia na malha híbrida com a utilização de elementos poligonais



Oliveira (2021) apresentou uma proposta de um esquema de adaptação para geração da malha híbrida composta por elementos poligonais planos e barras que será apresentado a seguir. Apresenta-se, também, uma forma alternativa de geração desta malha híbrida fazendo proveito de funcionalidades do *PolyMesher* (TALISCHI *et al.*, 2012b). O Apêndice E deste trabalho traz uma breve explicação do funcionamento do *PolyMesher*.

6.3.1. Proposta de Oliveira (2021)

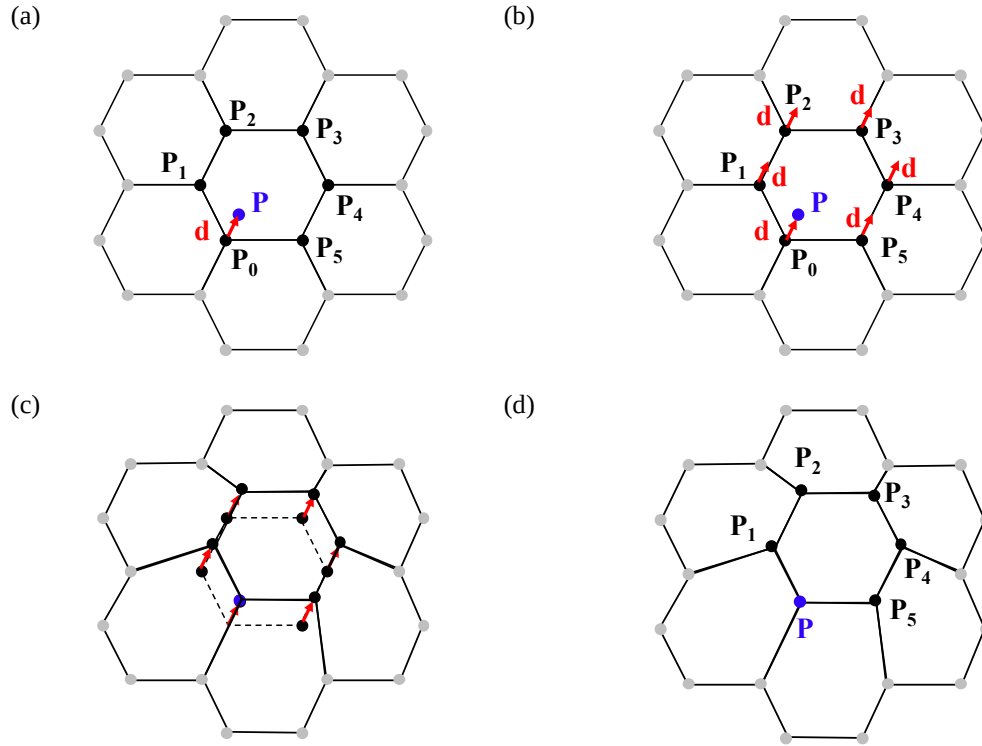
No trabalho de Oliveira (2021) a malha híbrida era formada por elementos poligonais e as barras da estrutura base eram geradas a partir de uma grade de nós regular. A proposta feita pelo autor para evitar a patologia da Figura 6.2 foi de que, após a malha de elementos poligonais ser gerada e a grade de nós para geração da estrutura base ser definida, seja realizado um processo de adaptação dos nós da malha de elementos poligonais. O processo de adaptação é realizado com duas operações: uma de translação e uma de escala.

A Figura 6.2 ilustra o processo de adaptação, na qual o nó P representa a posição requerida para o nó da malha da malha dos elementos de barra, não coincidente com os nós da malha de elementos poligonais. Inicialmente, identifica-se o nó da malha de elementos poligonais mais próximo de P , denominado P_0 , e qual o elemento poligonal em que P está localizado.

Uma vez que a identificação foi feita, é realizada a translação do elemento. Para tanto, calcula-se o vetor $\mathbf{d}$, dado pela diferença entre as posições dos nós P_0 a P , e aplica-se um deslocamento

de corpo rígido ao elemento poligonal em que P está contido, somando o vetor $\mathbf{d}$ na posição dos nós que compõe o elemento, mantendo a posição de todos os demais nós da malha fixos. Esta etapa está ilustrada na Figura 6.3.

Figura 6.3 - Etapa de translação do processo de adaptação: (a) Cálculo de $\mathbf{d}$; (b) e (c) Aplicação de $\mathbf{d}$ nos nós do elemento; (d) Malha após a translação



A etapa de translação é suficiente para resolver o problema de incompatibilidade entre os nós das barras e dos polígonos. Contudo, ao realizá-la, pode ser que os elementos adjacentes aos transladado tornem-se polígonos com ângulos acentuadamente agudos. Portanto, aplica-se mais uma etapa ao processo, que é a etapa de reduzir a dimensão do elemento transladado. A redução da escala é feita conforme a equação (6.25)

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{P} + f_{esc} \mathbf{v}_i \quad (6.25)$$

Onde, $\mathbf{v}_i = \mathbf{P}_i - \mathbf{P}$ e f_{esc} é o fator de escala.

O fator de escala é definido com base na dimensão média dos elementos da malha de elementos finitos:

$$f_{esc} = 1 - \frac{\|\mathbf{d}\|}{d_{med}} \quad (6.26)$$

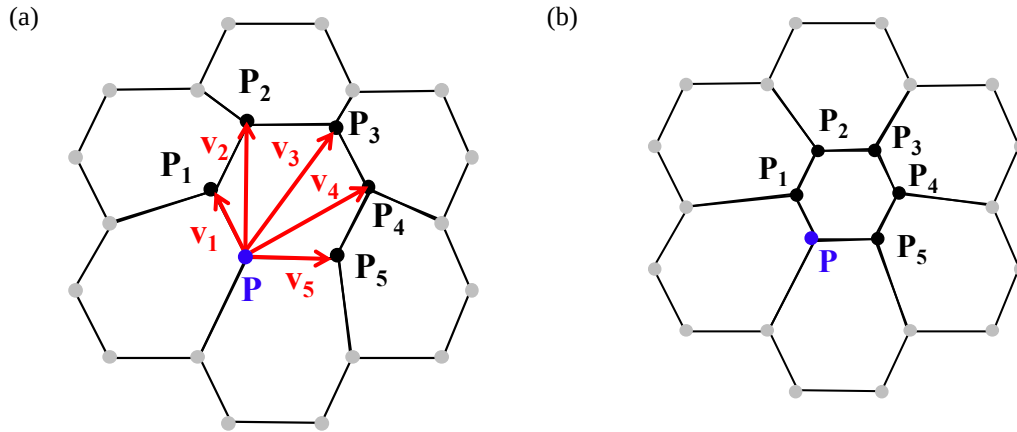
Onde, $\mathbf{d}$ é o vetor anteriormente definido e ilustrado na Figura 6.3 e d_{med} é a dimensão média do elemento, calculada por:

$$d_{med} = \sqrt{\frac{4 A_{\Omega}}{\pi N_c}} \quad (6.27)$$

Sendo A_{Ω} a área do domínio de projeto.

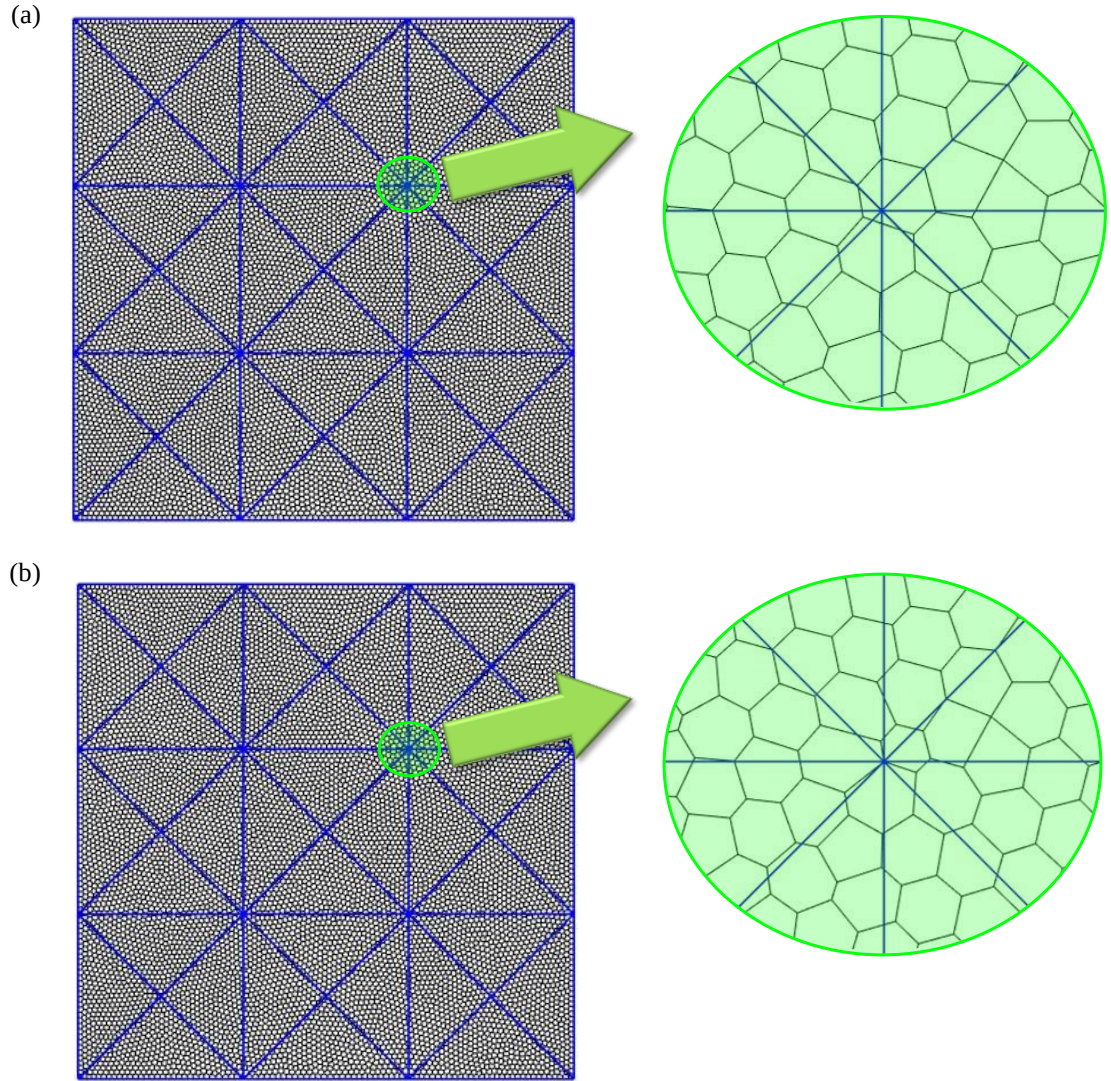
Essa etapa de redução da dimensão do elemento transladado é ilustrada na Figura 6.4.

Figura 6.4 - Etapa de redução da escala do elemento do processo de adaptação: (a) Definição dos vetores $\mathbf{v}_i$; (b) Malha após a etapa de redução da escala do elemento transladado



Apresenta-se na Figura 6.5 uma malha gerada com essa metodologia. Para o exemplo, considerou-se um domínio quadrado de dimensão igual a 1 m, discretizado em 10000 elementos poligonais. Enquanto a estrutura base foi gerada a partir de uma grade de nós regular de 4×4 , considerando um grau de conectividade igual a 1. A Figura 6.5 mostra que a proposta de Oliveira (2021) resolve satisfatoriamente a patologia da malha híbrida.

Figura 6.5 - Malha híbrida: (a) Antes do processo de adaptação; (b) Após o processo de adaptação



Adota-se como parâmetro para avaliar uniformidade da malha o erro adimensional, E_r , definido por Talischi *et al.* (2012b) apresentado na equação (6.28). A definição de forma mais detalhada desse erro adimensional é feita no Apêndice E deste trabalho.

$$E_r = \frac{N_c}{|\Omega|^{\frac{3}{2}}} \left(\sum_{e=1}^{N_c} A_l^2 \|\mathbf{x}_l - \mathbf{x}_l^c\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.28)$$

Onde, N_c é o número de elementos contínuos; $|\Omega|$ é a área do domínio estendido; A_l é a área do elemento contínuo l ; $\mathbf{x}_l$ é a posição da semente do elemento l ; e $\mathbf{x}_l^c$ é a posição do centroide do elemento l .

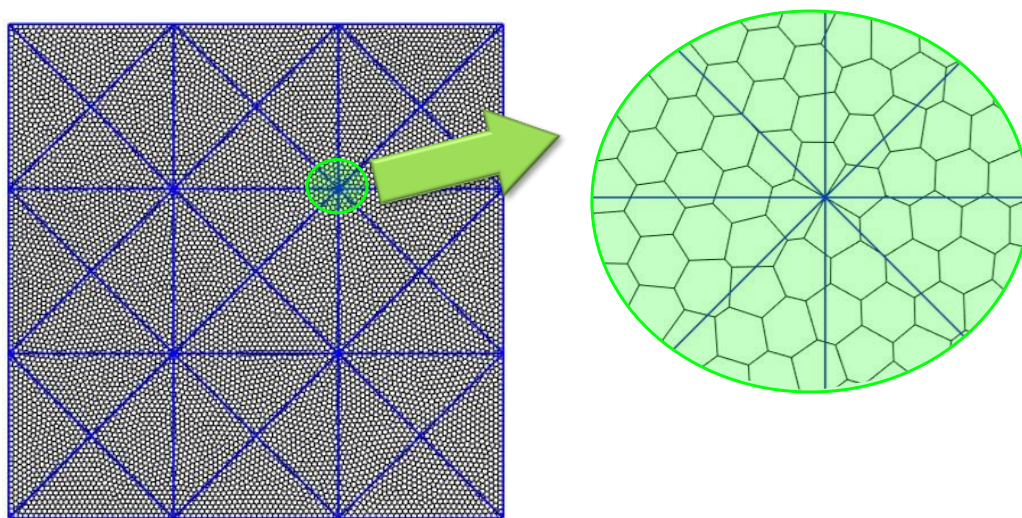
A malha apresentada na Figura 6.5 (a) apresenta um erro igual a $9,996 \times 10^{-4}$, porém após o processo de adaptação, cuja malha resultante é apresentada na Figura 6.5 (b), o erro é de $8,210 \times 10^{-3}$.

6.3.2. Forma alternativa

Pelo fato deste trabalho fazer uso do PolyMesher (TALISCHI *et al.*, 2012b) para geração das malhas de elementos contínuos, apresenta-se uma proposta de geração da malha híbrida utilizando algumas funcionalidades já implementadas no código a fim de evitar o uso do processo de adaptação apresentado no item anterior.

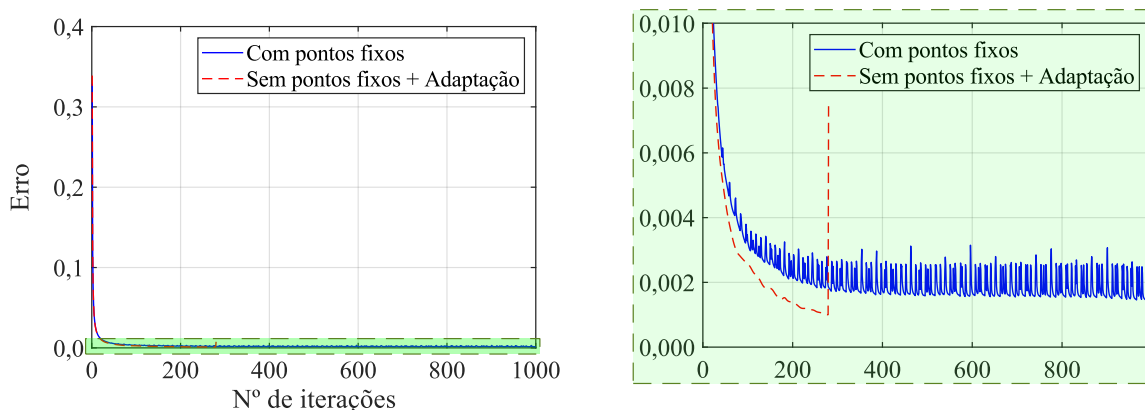
O trabalho de Pereira *et al.* (2016) apresentou uma nova função que é adicionada ao PolyMesher a fim de permitir a especificação de pontos como vértices no domínio. Com isso, pode-se definir uma lista de pontos com posições fixas no domínio durante a geração da malha de elementos poligonais. A proposta deste trabalho para a geração da malha híbrida utilizando elementos poligonais é que os pontos da grade de nós da geração da estrutura base sejam definidos como pontos fixos ao PolyMesher. Um exemplo de malha híbrida obtida utilizando esta proposta é apresentado na Figura 6.6.

Figura 6.6 - Malha híbrida obtida pela abordagem alternativa



É importante ressaltar que, como são fornecidos muitos pontos com posição fixa, a convergência do algoritmo de Lloyd é comprometida. Na Figura 6.7 um gráfico compara a convergência do algoritmo de Lloyd para geração das malhas de elementos poligonais apresentadas nas Figura 6.5 (a) e Figura 6.6, com e sem a presença de pontos fixos.

Figura 6.7 - Convergência do algoritmo de Lloyd



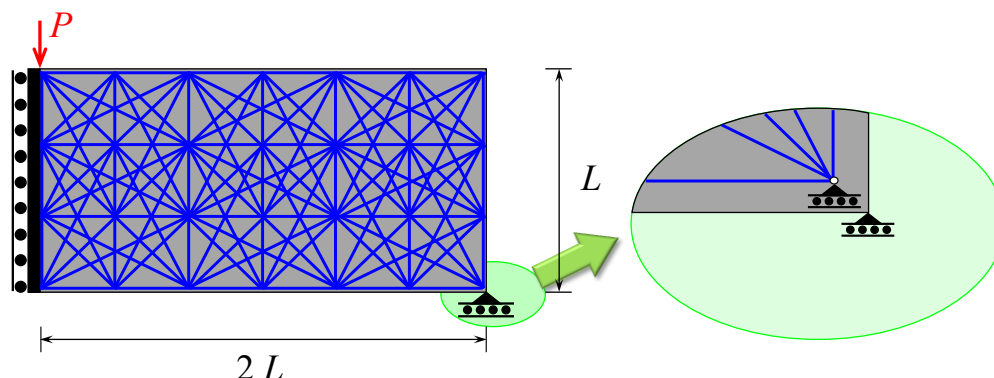
Na Figura 6.7 a região marcada em verde é ampliada a fim de facilitar a visualização do comportamento do algoritmo à medida que ele se aproxima da convergência. Observe que com a consideração de muitos pontos fixos no domínio, o Algoritmo de Lloyd falha em convergir, apresentando um comportamento oscilatório com um erro próximo da tolerância. E embora o algoritmo falhe em convergir, a malha obtida ainda assim é satisfatória para uso nos processos de análise estrutural e otimização.

Conforme o gráfico de convergência da Figura 6.7, o erro final da malha utilizando essa forma de geração alternativa é igual a $2,536 \times 10^{-3}$, inferior ao obtido com a utilização do processo proposto por Oliveira (2021).

6.4. ESQUEMA DE OTIMIZAÇÃO EM DUAS ETAPAS

Oliveira (2021) apresentou uma proposta de um esquema de otimização em duas etapas para obtenção de soluções topológicas utilizando a formulação híbrida. O exemplo da viga MBB, apresentada na Figura 6.8, permite explicar o esquema de otimização em duas etapas.

Figura 6.8 - Viga MBB



O valor da dimensão L é igual a 1 m e a carga P é igual a 5 kN. Destaca-se que, como detalhado na região ampliada mostrada na Figura 6.8, a mesma restrição de apoio no nó do canto inferior direito em que ocorre a ligação das barras é imposta ao nó do canto inferior do domínio.

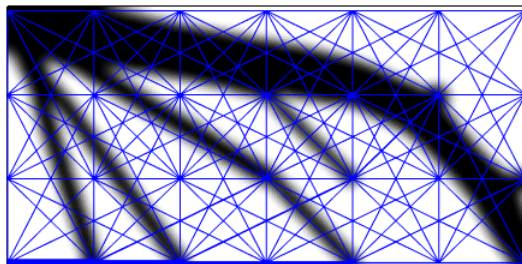
Adota-se o modelo de material bilinear, apresentado no item 3.2.1 deste trabalho, para os elementos contínuos. Os parâmetros adotados para o modelo constitutivo são: módulo de elasticidade à compressão é igual a 24 GPa e à tração igual a 2,4 GPa, coeficiente de Poisson à compressão igual a 0,2 e à tração igual a 0,02, de forma que seja respeitada a relação $E_c \nu_t = E_t \nu_c$. Para as barras, é utilizado o modelo constitutivo bilinear, descrito no Apêndice E deste trabalho, em que o módulo de elasticidade à tração é igual a 210 GPa e à compressão é nulo. Essa definição apropriada das propriedades do modelo constitutivo é necessária a fim que, na solução topológica final, os caminhos de força de compressão sejam representados pelos elementos contínuos e os caminhos de força de tração sejam representados pelos elementos de barra.

A primeira etapa do esquema proposto por Oliveira (2021) consiste em otimizar a distribuição de material no contínuo e as áreas das barras concomitantemente. Isso é feito solucionado o problema de otimização apresentado em (6.1) utilizando o OC como algoritmo de otimização. Nesta etapa é realizada um esquema de continuação para o valor do coeficiente de penalização do modelo SIMP, iniciando com um valor igual a 1 e incrementado em Δp a cada n iterações até atingir um valor igual a 3. Neste capítulo, adotou-se $\Delta p = 0,1$ e $n = 2$.

Para ilustrar o resultado desta etapa, a Figura 6.9 apresenta a solução obtida para o exemplo da viga MBB apresentada na Figura 6.8. O domínio foi discretizado em uma malha de 20000 elementos finitos poligonais. Foram adotados um valor do parâmetro M do OC igual a 0,1 e um

fator de amortecimento igual a 0,5. A Figura 6.9 apresenta a solução após o final da primeira etapa do processo de otimização. Utiliza-se o filtro de densidade linear, com um raio constante igual a 0.05 m. O valor da fração de volume adotada é igual a 40% do volume do domínio estendido. No início do processo de otimização 20% desta fração de volume foi distribuída uniformemente entre as barras e 80% entre os elementos contínuos.

Figura 6.9 - Viga MBB - Solução no final da primeira etapa do processo de otimização



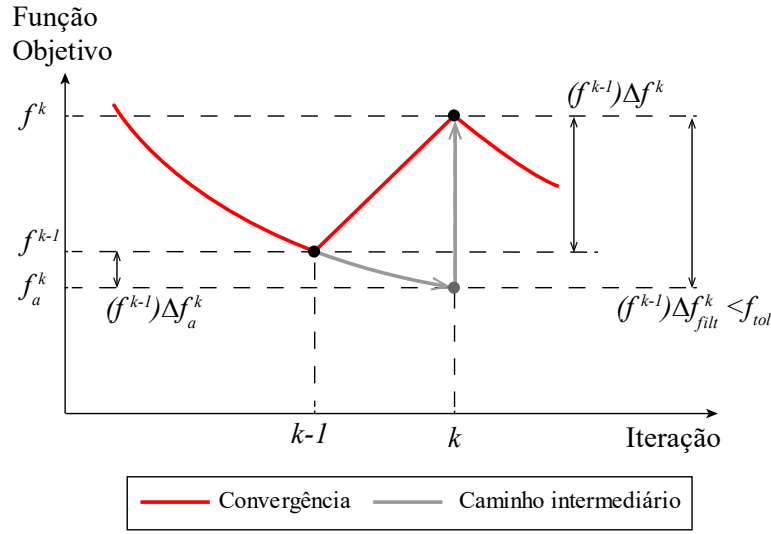
Assim como feito no método da *Ground Structure* descrito brevemente no Apêndice D, é necessário eliminar as barras finas presentes na solução e que não contribuem de forma significativa para o valor da função objetivo. Para tanto, faz-se necessário definir uma operação de filtragem das barras finas. Utiliza-se aqui a ideia proposta por Sanders, Ramos Jr. e Paulino (2017).

$$\text{Filtro}(\mathbf{a}, \alpha_f) = \begin{cases} 0, & \frac{a_i}{\max(\mathbf{a})} < \alpha_f < 1 \\ a_i, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (6.29)$$

Portanto, o filtro atua com base num parâmetro de corte α_f , que varia entre 0 e 1, sobre as áreas normalizadas das barras. A definição do valor do parâmetro de corte deve ser feita com precaução, a fim de evitar que sejam eliminadas barras que são necessárias para garantir o equilíbrio da estrutura. Na abordagem híbrida proposta por Gaynor, Guest e Moen (2013), as barras são conectadas em nós da malha de elementos poligonais, os quais apresentam uma rigidez mínima. No entanto, a eliminação de um grande número de barras causa problemas na convergência na análise não-linear utilizando o método de Newton-Raphson.

Oliveira (2021), inspirado no trabalho de Sanders, Ramos Jr. e Paulino (2017), apresentou uma proposta de obtenção do parâmetro de corte utilizando o método da bisseção em que o controle do parâmetro de busca baseia-se no salto que ocorre no valor da função objetivo com a retirada das barras, conforme ilustrado na Figura 6.10.

Figura 6.10 - Comportamento da função objetivo com a aplicação do filtro de eliminação das barras finas



Fonte: Adaptado de Sanders, Ramos Jr. e Paulino (2017)

O controle da variação do salto da função objetivo utilizado por Oliveira (2021) foi:

$$\frac{f^k}{f_a^k} < f_{tol}$$

O controle da variação da função objetivo adotado neste trabalho é definido por:

$$\Delta f_{filt}^k = \frac{f^k - f_a^k}{f^{k-1}} < f_{tol} \quad (6.30)$$

Neste trabalho, foi utilizado o Método do Passo Constante para obtenção do parâmetro de filtragem, enquanto no trabalho de Oliveira (2021) foi utilizado o Método da Bissecção. Descreve-se a seguir o algoritmo utilizado para obter o parâmetro de corte:

$$\alpha_f^{(i+1)} = \alpha_f^{(i)} + \Delta\alpha_f, \quad i = 0, \dots, n \quad (6.31)$$

O valor inicial do corte é dado por:

$$\alpha_f^{(0)} = \min\left(\frac{\min(\mathbf{a})}{\max(\mathbf{a})}, 10^{-10}\right) \quad (6.32)$$

E o valor do incremento $\Delta\alpha_f$ adotado foi 0,001.

O critério de parada do passo constante adotado é definido como:

$$EqF_{lg} = \begin{cases} true, & \frac{\|\mathbf{R}\|}{\|\mathbf{F}_{ext}\|} < 10^{-4} \text{ e } \Delta f_{filt}^k < f_{tol} \\ false, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (6.33)$$

Portanto, o critério de parada consiste tanto na verificação do equilíbrio da topologia quanto na verificação do valor do salto da função objetivo.

O Quadro 6.1 apresenta o algoritmo que foi implementado. Destaca-se que é feita uma verificação durante a busca a fim de verificar se o número de barras com o valor do filtro atualizado é igual ao número de barras da iteração anterior. Isto pode ser utilizado, pois caso o número de barras seja o mesmo, não há necessidade de se realizar uma nova análise estrutural nem recalcular o valor da função objetivo, o que promove uma economia em termos de custo computacional.

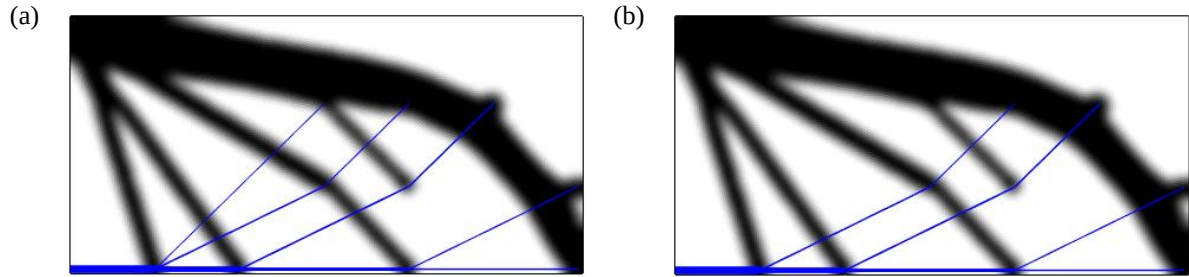
Quadro 6.1 - Algoritmo do filtro com passo constante

01:	Inicializar:
02:	Limite superior do filtro: $\alpha_f^+ = 1.0$
03:	Incremento do valor do filtro: $\Delta\alpha_f = 0,001$
04:	Valor inicial do filtro: $\alpha_f^{(0)}$ com (6.32)
05:	Valor atual do filtro: $\alpha_f = \alpha_f^{(0)} + \Delta\alpha_f$
06:	Valor do filtro em equilíbrio: $\alpha_f^{eq} = \alpha_f^{(0)}$
07:	Número de barras: $NB = NBarras$
08:	Variável <i>flag</i> : $EqFlg = true$
09:	Enquanto $EqFlg == true$ e $\alpha_f < \alpha_f^+$ faça
10:	Aplique o filtro: $\mathbf{a}_{new} = Filtro(\mathbf{a}, \alpha_f)$
11:	Calcule número de barras com o valor do filtro atual: $NBFilt = size(\mathbf{a}_{new} > 0)$
12:	Se $NBFilt < NB$ faça
13:	Análise não-linear da estrutura com $\mathbf{a}_{new}$
14:	Cálculo da função objetivo
15:	Cálculo do salto no valor da função objetivo com (6.30)
16:	Atualizar $EqFlg$ com (6.33)
17:	Atualizar $NB = NBFilt$
18:	Fim se
19:	Se $EqFlg == true$: $\alpha_f^{eq} = \alpha_f$, Fim se
20:	Atualizar valor do filtro: $\alpha_f = \alpha_f + \Delta\alpha_f$
21:	Fim enquanto
22:	$\alpha_f = \alpha_f^{eq}$

Uma vez apresentado o algoritmo, é importante destacar a razão pela sua escolha. Foi observado que ao se retirar uma quantidade excessiva de barras, o método de Newton-Raphson falha em convergir no número máximo de iterações pré-estabelecido. Assim, constatou-se ser vantajoso iniciar o processo de busca no limite inferior da variável, e ir aplicando incrementos. Deste modo, evita-se que o processo de busca envolva muitos valores de filtro que promovam desequilíbrio.

A Figura 6.11 apresenta as soluções obtidas após o processo de filtragem utilizando o algoritmo do Quadro 6.1 na solução da Figura 6.9. Foram considerados dois valores para a tolerância do valor do salto da função objetivo: 0,001 e 0,1.

Figura 6.11 - Viga MBB - Solução após a aplicação do filtro para eliminação das barras finas: (a) $f_{tol} = 0,001$; (b) $f_{tol} = 0,1$.



Para um valor de f_{tol} igual a 0,1 o valor do filtro α_f obtido foi igual 0,062, enquanto que, para $f_{tol} = 0,1$, obteve-se $\alpha_f = 0,155$. Observe que à medida que o valor da tolerância para o salto da função objetivo aumenta, uma maior quantidade de barras é eliminada.

Por fim, Oliveira (2021) propôs uma etapa adicional ao processo de otimização para reduzir as densidades intermediárias na solução final após a aplicação do filtro. Nesta etapa secundária, consideram-se como variáveis de projeto apenas as variáveis associadas aos elementos contínuos. Contudo, ainda considerando a rigidez das barras para a solução do sistema de equações de equilíbrio. O problema de otimização desta etapa pode ser escrito como:

Obter: $\mathbf{z}_c$

Que minimiza: $f(\mathbf{z}_c, \mathbf{z}_b, \mathbf{U}(\mathbf{z})) = -\Pi_{min}(\mathbf{z}_c, \mathbf{z}_b, \mathbf{U}(\mathbf{z}))$

Tal que: $g(\mathbf{z}_c) = \frac{\mathbf{A}^T \mathbf{m}_v(\mathbf{P} \mathbf{z}_c)}{\mathbf{A}^T \mathbf{I}} + \frac{\mathbf{L}^T \mathbf{a}}{\mathbf{A}^T \mathbf{I}} - V_{max} \leq 0$ (6.34)

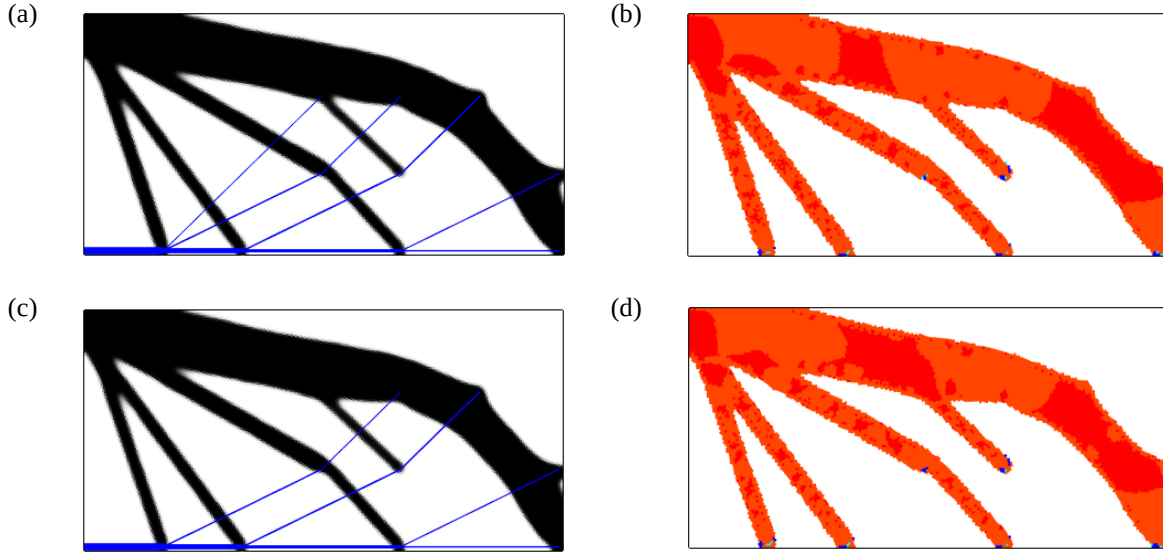
$$0 < z_{min} \leq z_i \leq z_{max}, \quad i = 1, \dots, N_c$$

Com: $\mathbf{F}_{int}(\mathbf{z}_c, \mathbf{z}_b, \mathbf{U}(\mathbf{z})) = \mathbf{F}_{ext}$

Nesta segunda etapa utiliza-se uma função de interpolação não-linear do volume de material no elemento para reduzir a quantidade de densidades intermediárias na solução. Neste trabalho, foi adotada a função proposta por Wang *et al.* (2011), apresentada na equação (2.18), com um valor de ρ_0 igual a 0,5. Para o parâmetro β é realizado um esquema de continuação, em que se inicia com $\beta = 1$ e aumenta em 1 a cada 5 iterações até um valor máximo igual a 10.

As soluções obtidas para o exemplo da MBB após esta etapa são apresentadas na Figura 6.12. É adotado o mesmo padrão de cores do Capítulo 3, apresentado na Figura 3.6, para realizar a identificação do estado de tensão dos elementos contínuos.

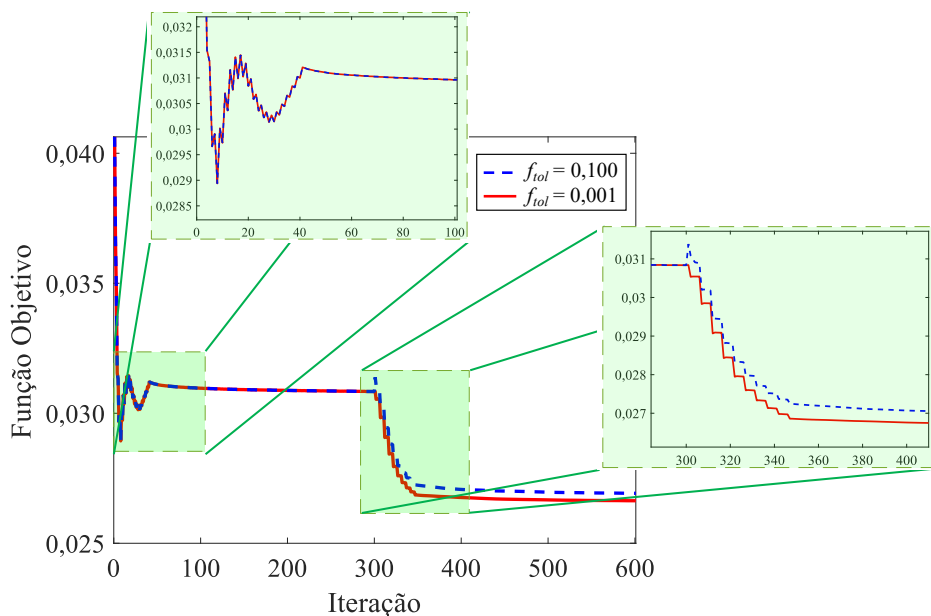
Figura 6.12 - Viga MBB - Solução final do processo de otimização: (a) Solução híbrida obtida com $f_{tol} = 0,001$; (b) Identificação do estado de tensão dos elementos para $f_{tol} = 0,001$; (c) Solução híbrida obtida com $f_{tol} = 0,1$; (d) Identificação do estado de tensão dos elementos para $f_{tol} = 0,1$;



Verifica-se uma redução das densidades intermediárias nas soluções. Além disso, é interessante observar a identificação do estado de tensão dos elementos contínuos, o que confirma que os membros comprimidos dos caminhos de força estão sendo representados pelos elementos contínuos, tal como havia sido idealizado.

Por fim, compara-se a evolução da função objetivo no processo de otimização considerando os dois valores de f_{tol} .

Figura 6.13 – Viga MBB: Evolução da função objetivo durante o processo de otimização



Na Figura 6.13, o salto inicial no valor da função objetivo ocorre devido a distribuição inicial entre elementos contínuos e de barra. As oscilações no valor da função objetivo até a iteração 40 ocorrem devido ao esquema de continuação para o valor da penalização do modelo de material SIMP. Na iteração 300 ocorre um salto no valor da função objetivo devido a retirada das barras finas, o qual é maior para $f_{tol} = 0,1$. Após isso a cada 10 iterações se tem um decréscimo no valor da função objetivo devido ao esquema de continuação no parâmetro β da função de interpolação do volume de material, o que promove uma redução das densidades intermediárias, e consequentemente um aumento na rigidez da estrutura.

6.5. SOBRE A IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

A implementação computacional foi feita utilizando como base o código educacional, `PolyTop`, fornecido no artigo de Talischi *et al.* (2012a). Devido a modularidade do código, as principais alterações consistiram na alteração da rotina de análise estrutural; no cálculo da função objetivo e de sua sensibilidade.

Para geração da malha inicial de elementos de barra, foi utilizado o algoritmo de geração da *Ground Structure* do GRAND, código apresentado por Zegard e Paulino (2014).

O sistema de equações de equilíbrio é solucionado utilizando o algoritmo de Newton-Raphson do Quadro 3.1. Utiliza-se como vetor de deslocamentos inicial o vetor de deslocamentos da solução da iteração anterior do processo de otimização. Desse modo o resíduo inicial é menor o que implica em uma quantidade menor de iterações para se chegar à convergência.

Por fim, ressalta-se que para aumentar a eficiência computacional, foi utilizado um arquivo MEX para realizar a compilação da matriz de rigidez, do vetor de forças internas e energia interna de deformação em cada elemento. O uso do arquivo MEX foi feito a partir de uma adaptação da rotina fornecida no código educacional `PolyStress` (LONDOÑO; PAULINO, 2021a).

6.6. EXEMPLOS

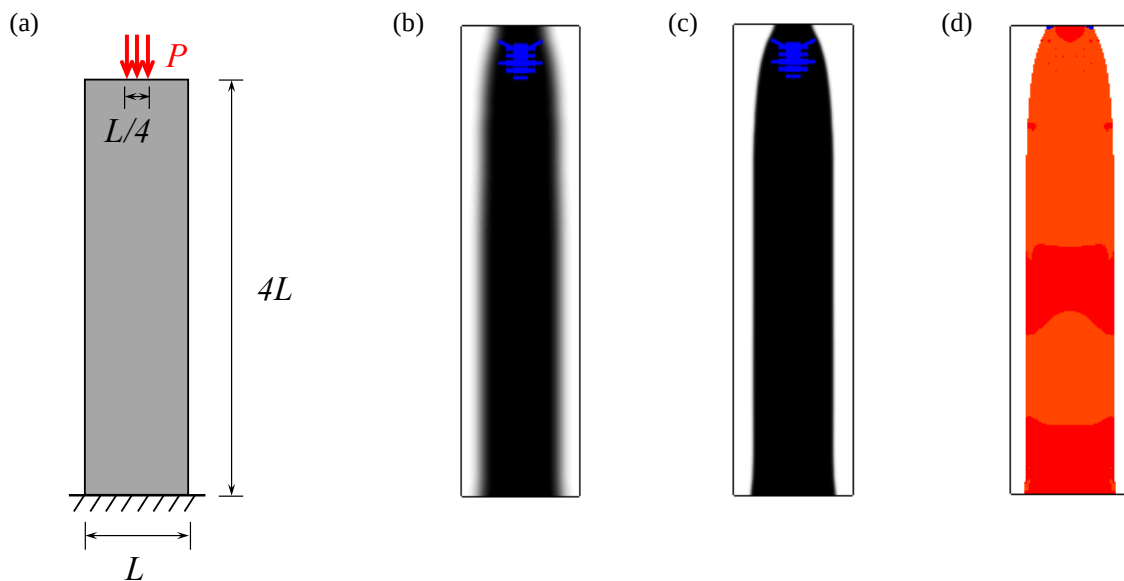
Em todos os exemplos a serem apresentados nesta seção foram utilizados os mesmos parâmetros dos materiais, do processo de otimização e esquemas de continuação do exemplo da viga MBB apresentado no item 6.4.

6.6.1. Exemplo 01: Coluna com carga de compressão no topo

Este exemplo consiste em uma coluna com uma carga de compressão aplicada em uma região do topo. A geometria do problema é apresentada na Figura 6.14 (a), sendo que a dimensão L adotada é igual a 0,8 m e a carga P é igual a 120 kN/m. O domínio contínuo foi discretizado em uma malha estruturada de 80 x 320 elementos quadrados. A estrutura base foi gerada a partir de uma grade de nós de 17 x 65 nós com nível de conectividade igual a 2.

A fração de volume adotada foi igual a 65% e o raio do filtro de densidade constante e igual a 0,1 m. O valor de f_{tol} adotado foi 0,001 e o valor do filtro obtido durante o processo de busca foi igual a 0,258.

Figura 6.14 – Exemplo 01: (a) Geometria e condições de contorno; (b) Solução após a aplicação do filtro; (c) Solução final do processo de otimização; (d) Identificação do estado de tensão dos elementos contínuos



A solução apresentada na Figura 6.14 (c) com a presença de barras horizontais na região do topo indica que a formulação proposta neste trabalho consegue representar o efeito de espraçamento de tensões, assim como o modelo bilinear ortotrópico proposto por Darwin e Pecknold (1974) utilizado nos trabalhos de Gaynor, Guest e Moen (2013) e Oliveira (2021). O motivo é que no modelo bilinear isotrópico utilizado neste trabalho, quando tensões principais possuem sinais distintos, os parâmetros de módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson associados a cada uma das direções são distintos.

Logo, o modelo constitutivo bilinear isotrópico é adequado à presente proposta, que consiste em obter o caminho de forças no interior de estruturas de concreto armado.

É calculada a força resultante das barras na metade da coluna. O valor obtido é igual a 1,637 kN, e a razão entre essa resultante e a força vertical aplicada é igual a 0,0682. De acordo com El Debs (2017), para um bloco parcialmente carregado com uma força vertical, F_v , a força de tração resultante, F_a , é obtida por:

$$\frac{F_a}{F_v} = \alpha \left(1 - \frac{L_0}{L} \right) \quad (6.35)$$

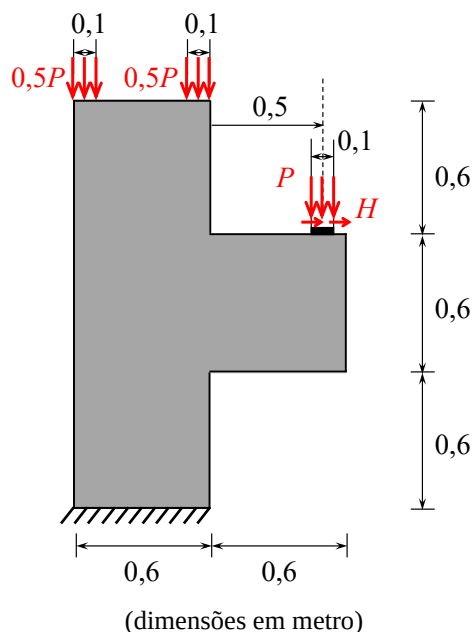
Onde, L é a largura da seção transversal do bloco; L_0 é a largura da seção parcialmente carregada do bloco; e o parâmetro α , segundo, El Debs (2017), varia segundo a literatura entre 0,25 e 0,32.

Substituindo $L_0 = L/4$ e usando $\alpha = 0,25$ na equação (6.35), obtém-se uma razão entre as forças igual a 0,1875. Portanto, tem-se que o valor obtido subestima a força de tração que ocorre devido ao espraçamento de tensões no topo da coluna. Porém, é importante destacar que a equação (6.35) é empírica. Logo, nela é levado em consideração efeitos que ocorrem na estrutura real, que a simulação numérica realizada não consegue captar com o modelo utilizado.

6.6.2. Exemplo 02: Consolo curto

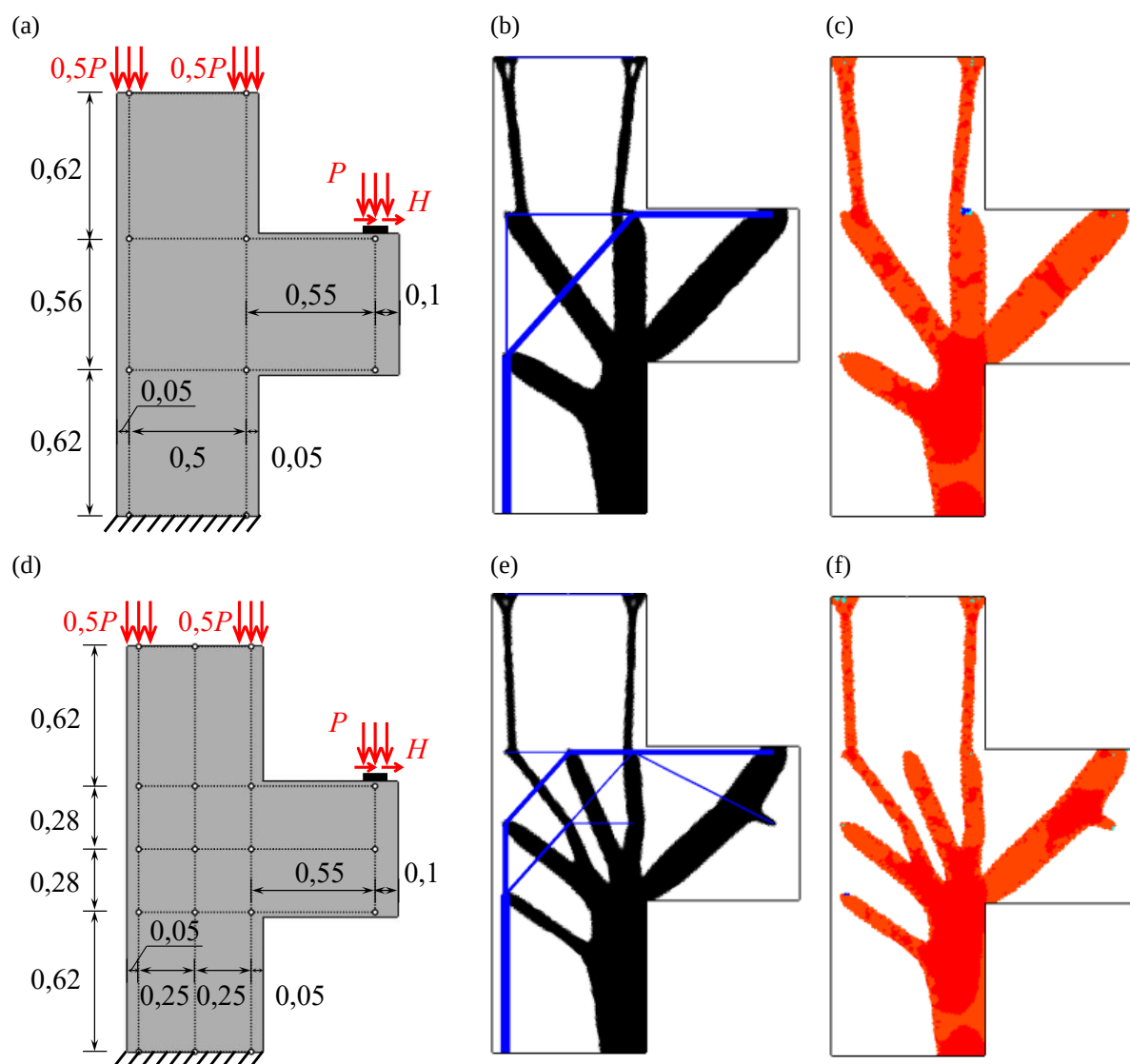
Este exemplo analisa um consolo curto cujas geometria e condições de contorno do consolo são apresentadas na Figura 6.15. Em todas as análises foram utilizados os seguintes parâmetros: raio do filtro de densidade constante e igual a 0,02 m; fração de volume igual a 40%; o parâmetro de tolerância do filtro de eliminação das barras finas, f_{tol} , igual a 0,1.

Figura 6.15 - Exemplo 06: Geometria e condições de contorno



Inicialmente foram adotadas duas grades de nós menos refinadas apresentadas na Figura 6.16 (a) e (d) para geração da malha inicial de elementos de barra. O domínio contínuo foi discretizado em uma malha de 20000 elementos poligonais e a malha inicial de elementos de barra foi gerada utilizando um nível de conectividade igual a 1. Na Figura 6.16 (b) e (e) são apresentadas as soluções finais do problema de otimização. O valor do filtro para eliminação das barras finas obtido para a solução da grade 1 foi igual a 0,016 e da grade 2 igual a 0,005.

Figura 6.16 - Exemplo 06 com grades de nós menos refinadas: (a) Grade de nós 1; (b) Solução topológica obtida com a grade de nós 1; (c) Identificação do estado de tensão dos elementos; (d) Grade de nós 2; (e) Solução topológica obtida com a grade de nós 2; (f) Identificação do estado de tensão dos elementos;

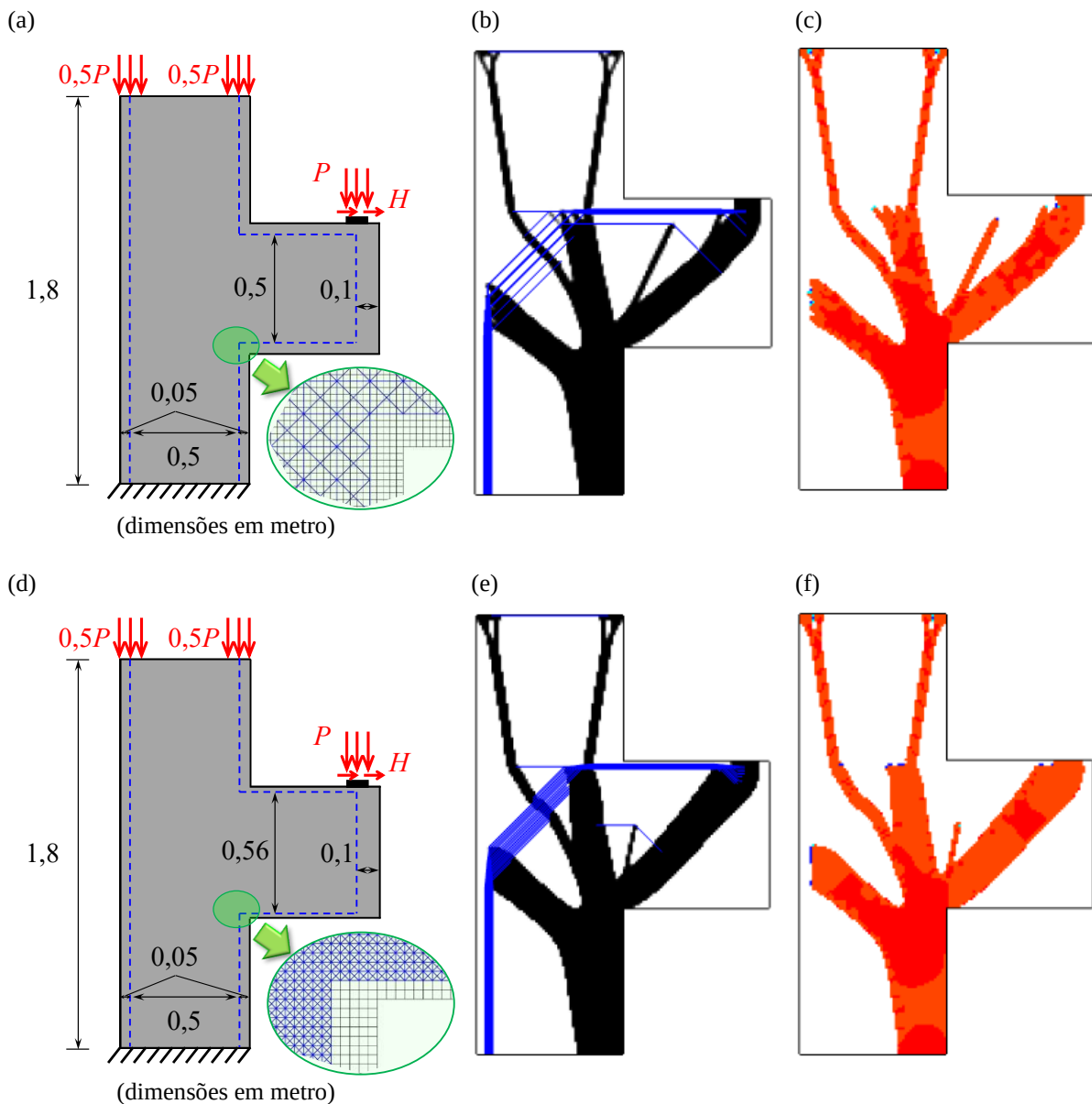


Observa-se na Figura 6.16 uma dependência da solução sobre a configuração inicial das barras. Essa é uma característica intrínseca à formulação híbrida e é herdada pelo método da *Ground Structure*. Nota-se, principalmente na solução com a grade 2 apresentada na Figura 6.16 (e), que há uma atração de material nos elementos contínuos para as regiões dos nós que definem as barras com área não-nulas.

Na malha híbrida, a transferência de esforços entre os elementos de barra e os elementos contínuos ocorre apenas nos nós compartilhados por ambos. Por isso, investiga-se, também, neste exemplo, se a adoção de uma malha de barras gerada a partir de uma grade de nós menos refinada promove uma alteração significativa no caminho de forças no interior da estrutura.

Para tanto, o problema foi solucionado utilizando duas malhas iniciais de elementos de barras mais refinadas, apresentadas na Figura 6.17 (a) e (d). O domínio contínuo nestas soluções foi discretizado em elementos quadrados de dimensão igual a 0,01 m. Na Figura 6.17 (a) e (d) a linha tracejada azul define a região em que são definidos os nós da malha inicial de elementos de barras. Na grade 1, da Figura 6.17 (a), os nós da grade têm um espaçamento igual a 0,05 m, enquanto na grade 2, da Figura 6.17 (d), os nós da grade têm um espaçamento igual a 0,01 m, ou seja, tem o mesmo refinamento da malha de elementos contínuos.

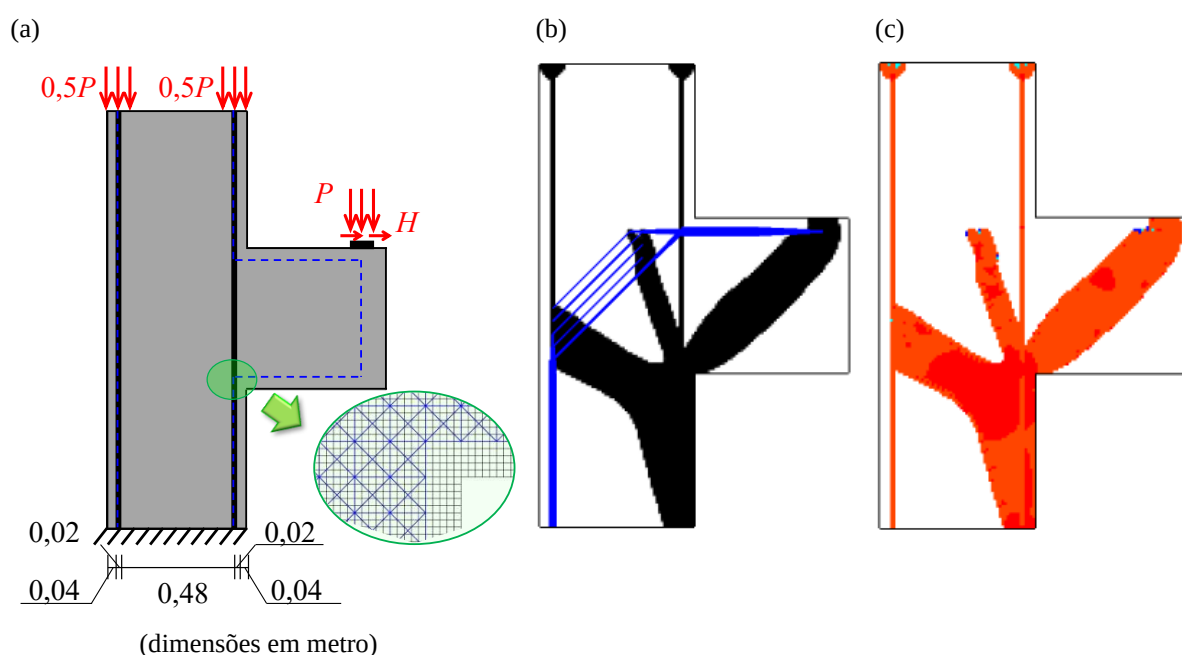
Figura 6.17 - Exemplo 06 com grades de nós mais refinadas: (a) Grade de nós 1; (b) Solução topológica obtida com a grade de nós 1; (c) Identificação do estado de tensão dos elementos; (d) Grade de nós 2; (e) Solução topológica obtida com a grade de nós 2; (f) Identificação do estado de tensão dos elementos;



As soluções obtidas com as malhas iniciais de elementos de barra mais refinadas, apresentadas na Figura 6.17, apresenta semelhanças em relação a solução apresentada na Figura 6.16 (b), a qual foi obtida com uma malha inicial de elementos de barra menos refinada. Destaca-se que as mesmas barras com maior área da solução da Figura 6.16 (b) estão presentes nas demais soluções. O que indica que a adoção de uma malha de barras menos refinada é válida obter os caminhos de força de tração.

O problema também foi solucionado considerando duas regiões passivas de elementos contínuos representando as armaduras já existentes nos pilares, indicadas na Figura 6.18 (a). O material que compõe a região passiva é um material elástico linear com módulo de elasticidade igual a 210 GPa e coeficiente de Poisson igual a 0,3. Foi utilizada a mesma malha híbrida descrita na Figura 6.17 (a), e foi considerado um valor de $f_{tol} = 0,1$.

Figura 6.18 - - Exemplo 06 com grade de nós mais refinada e regiões passivas: (a) Grade de nós 1 com região passiva; (b) Solução topológica obtida; (c) Identificação do estado de tensão dos elementos

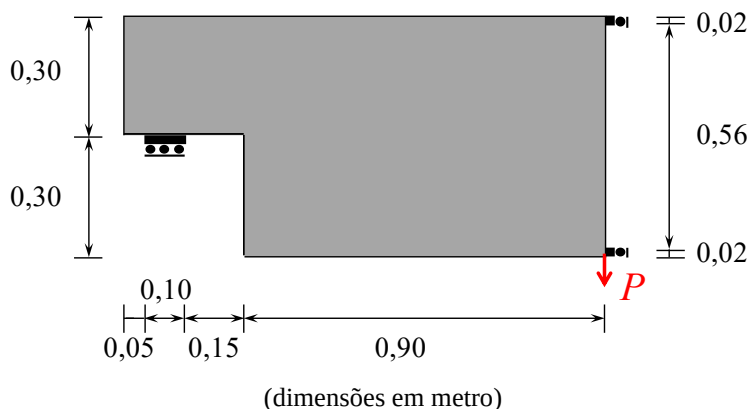


O valor do parâmetro de corte, α_f , obtido foi igual a 0,156. Verifica-se uma mudança na topologia obtida com a consideração das regiões passivas representando as armaduras longitudinais dos pilares. As bielas inclinadas na região do pilar que apareciam acima do consolo, presentes na solução da Figura 6.17 (b), não surgem na solução considerando as regiões passivas, apresentada na Figura 6.18 (b). Observa-se ainda, uma maior semelhança em comparação com a solução obtida pela abordagem de múltiplos materiais, apresentada na Figura 5.18 (b).

6.6.3. Exemplo 03: Dente de concreto

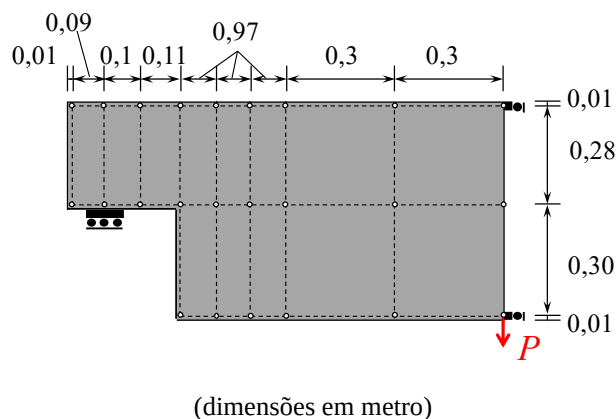
Este exemplo analisa um dente de concreto cujas geometria e condições de contorno são apresentadas na Figura 6.19.

Figura 6.19 - Dente: geometria e condições de contorno



A fração de volume adotada foi igual a 40% e o raio do filtro de densidade é constante e igual a 0,025 m. O domínio contínuo foi discretizado em uma malha de 20000 elementos finitos poligonais, e a malha inicial de elementos de barra foi gerada utilizando a grade de nós apresentada na Figura 6.20 com um nível de conectividade igual a 1.

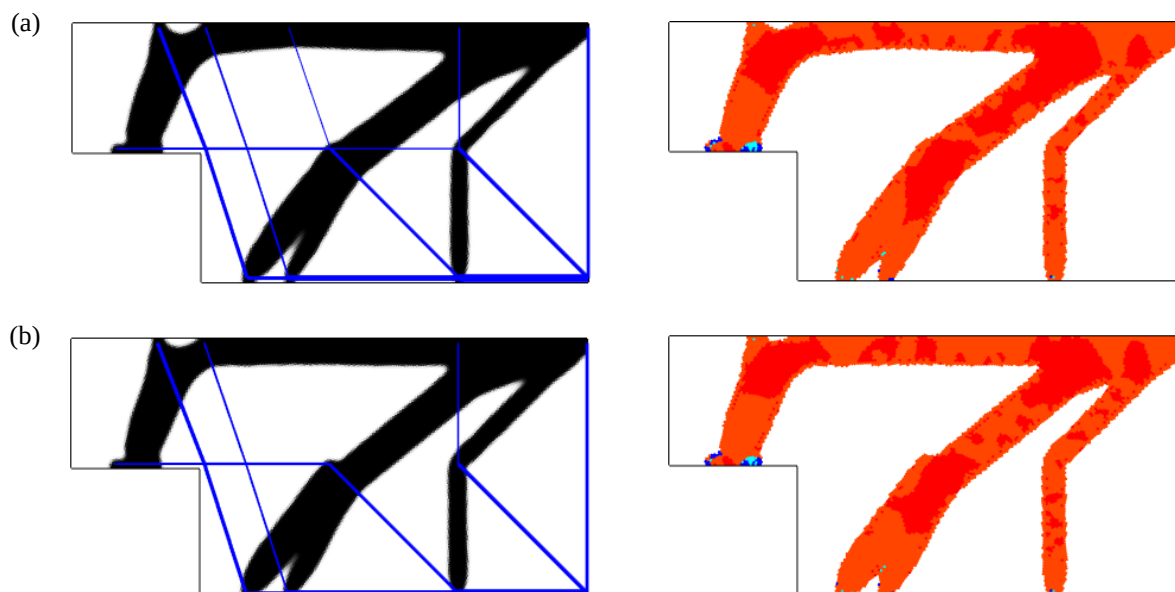
Figura 6.20 - Dente: Grade de nós 1 para geração da malha de elementos de barra



Foram obtidas soluções utilizando o filtro para eliminação das barras final com dois valores de f_{tol} . Para $f_{tol} = 0,001$ o valor do filtro obtido foi igual a 0,053 e para $f_{tol} = 0,1$ o valor do filtro obtido foi igual a 0,215. As soluções finais obtidas são apresentadas na Figura 6.21.

Figura 6.21 - Dente: Soluções topológicas finais e identificação do estado de tensão dos elementos contínuos:

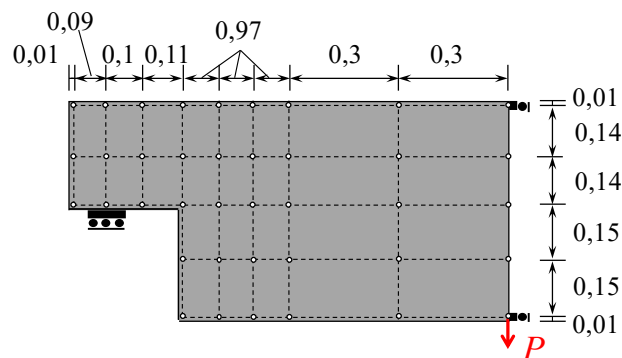
(a) $f_{tol} = 0,001$; (b) $f_{tol} = 0,1$



A principal diferença entre as soluções utilizando os valores de f_{tol} igual a 0,001 e 0,1, apresentadas nas Figura 6.21 (a) e (b), respectivamente, é o comprimento do tirante horizontal. Verifica-se que para um valor de f_{tol} igual a 0,1 a barra do tirante horizontal após a biela inclinada intermediária é eliminada.

Outro aspecto importante em ambas soluções apresentadas na Figura 6.21 é a representação da biela próxima à aresta superior do dente. Verifica-se que há uma atração de material nos elementos contínuos próximos aos nós do topo do dente que definem as barras. Essa dependência da solução sobre a configuração inicial das barras já havia sido destacada no exemplo anterior do consolo curto. Para evidenciar essa dependência sobre a configuração inicial das barras, neste exemplo, o problema foi solucionado com uma outra grade de nós, apresentada na Figura 6.22.

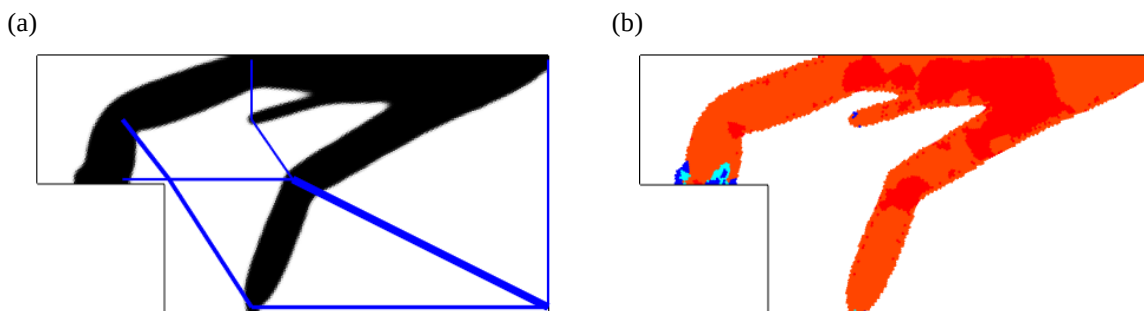
Figura 6.22 – Dente: Grade de nós 2 para geração da malha de elementos de barra



(dimensões em metro)

A solução final obtida utilizando um parâmetro de tolerância para o filtro de eliminação das barras finas, f_{tol} , igual a 0,1 é apresentada na Figura 6.23. O valor do parâmetro de corte α_f obtido durante o processo de busca foi igual a 0,301.

Figura 6.23 - Dente: Solução com grade de nós 2: (a) Solução; (b) Identificação do estado de tensão



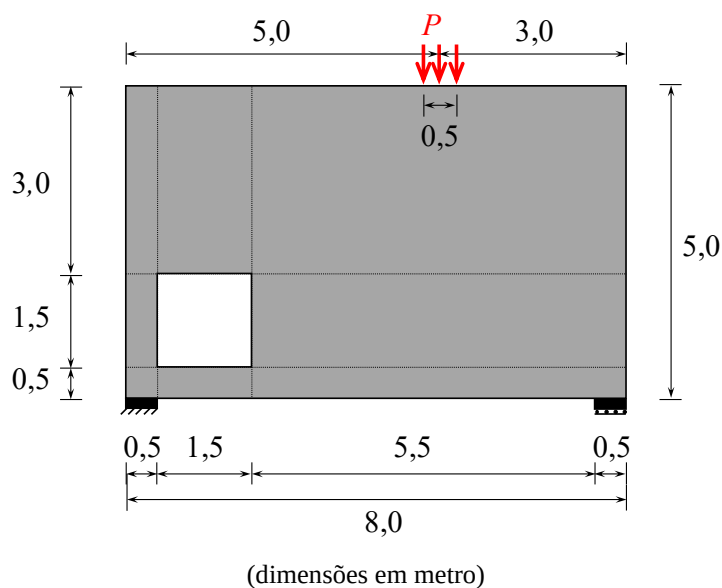
Comparando a solução apresentada na Figura 6.21 (b) e a da Figura 6.23, nota-se uma clara dependência da solução obtida pela formulação híbrida com a malha inicial de elementos de barra. Confirma-se que os nós das barras inclinadas na região superior do dente da solução da Figura 6.21 (b) atraem material para a região.

Destaca-se, também, a solução obtida pela formulação híbrida da Figura 6.23 se assemelha mais ao modelo bielas e tirante de Schlaich e Schäfer (1991) que as soluções obtidas com a formulação de múltiplos materiais apresentadas no item 5.5.4.

6.6.4. Exemplo 04: Viga parede com furo

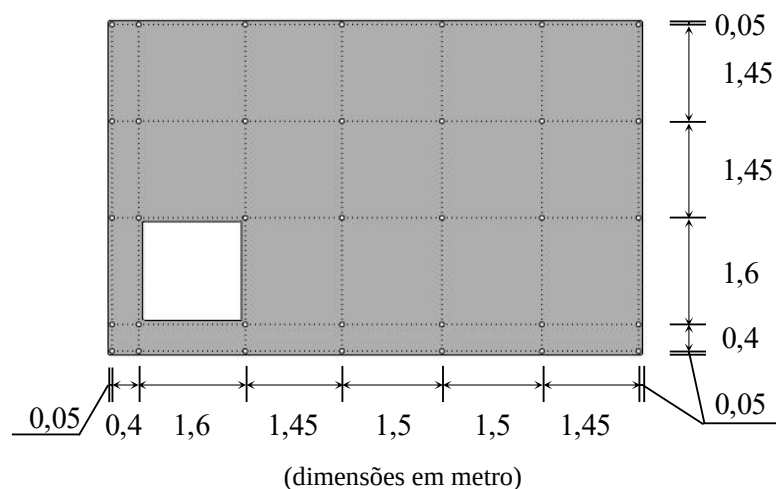
A geometria e condições de contorno do problema são apresentadas na Figura 6.24. Foi considerada uma fração de volume igual a 40% do volume do domínio estendido e o raio do filtro de densidade constante e igual a 0,2 m.

Figura 6.24 - Viga parede com furo: geometria e condições de contorno



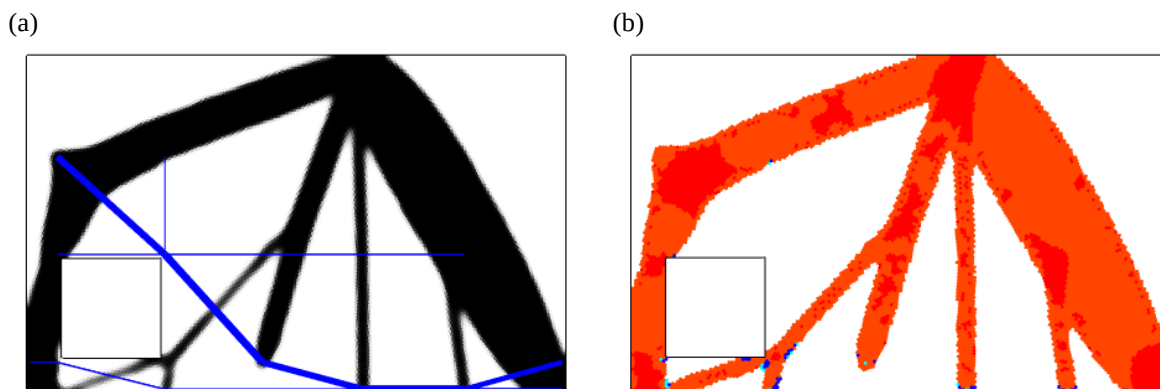
Inicialmente foi considerada uma grade de nós menos refinada para gerar a malha inicial de elementos de barra, adotando um nível de conectividade igual a 1. Essa grade é apresentada na Figura 6.25. O domínio contínuo foi discretizado em 20000 elementos finitos poligonais.

Figura 6.25 - Viga parede com furo: Grade de nós 1 para a geração da malha de elementos de barra



Apresenta-se na Figura 6.26 a solução obtida e a identificação do estado de tensão dos elementos contínuos. O parâmetro do filtro de barras finas, f_{tol} , foi adotado igual a 0,001 e o valor do parâmetro de corte obtido foi igual a 0,112.

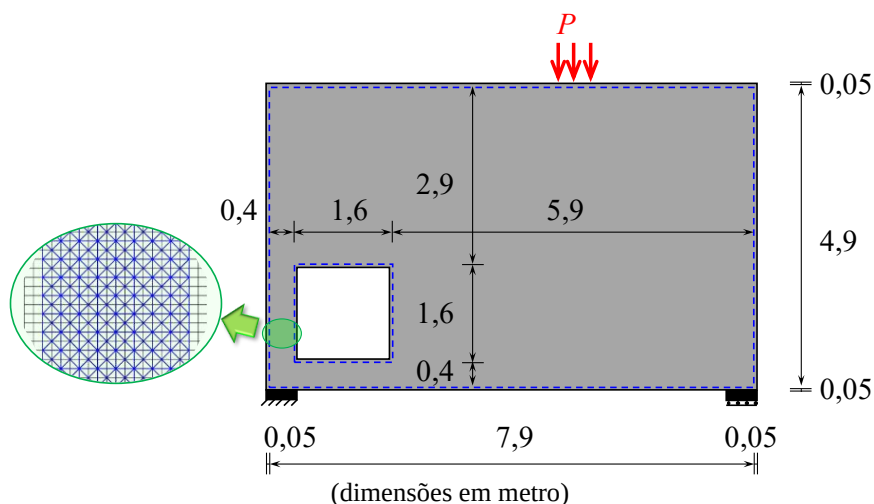
Figura 6.26 - Viga parede com furo: (a) Solução obtida; (b) Identificação do estado de tensão dos elementos contínuos



A solução Figura 6.26 permite visualizar um problema que ocorre nas soluções da formulação híbrida quando se usa uma grade de nós menos refinada, que é o fato de haver uma atração de material nos elementos contínuos nas regiões dos nós das barras.

O problema também foi solucionado com uma grade de nós refinada, apresentada na Figura 6.27. O domínio contínuo neste caso foi discretizado em elementos quadrilaterais de dimensão igual a 0,025 m. Na Figura 6.27 a linha tracejada azul define a região em que são definidos os nós da malha inicial de elementos de barras. Os nós da grade têm um espaçamento igual a 0,05 m.

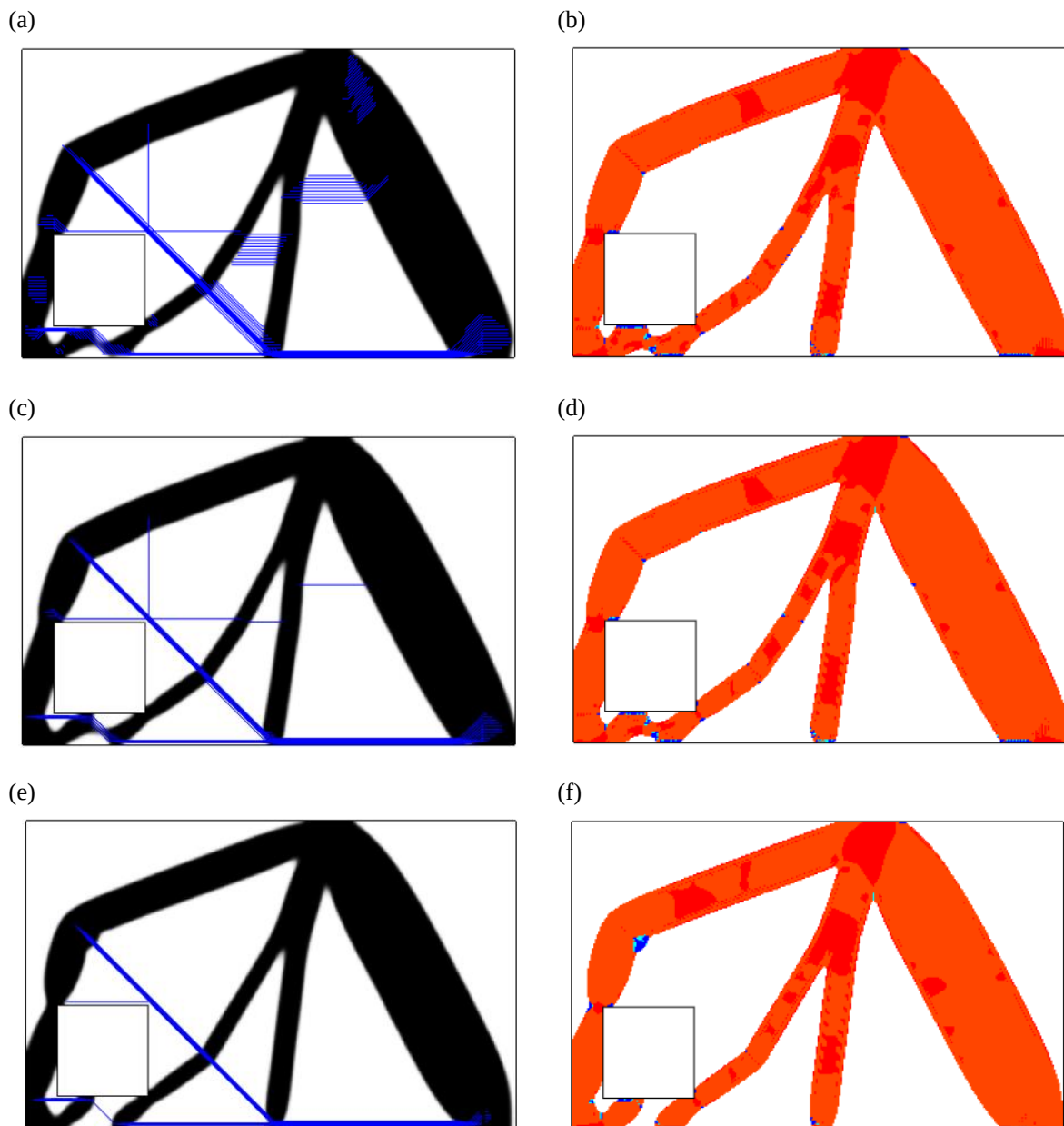
Figura 6.27 -Viga parede com furo: Grade de nós refinada para geração da malha inicial de elementos de barra



As soluções obtidas para três valores de f_{tol} são apresentadas na Figura 6.28. Para o valor de $f_{tol} = 0,001$, o valor do parâmetro de corte de barras finas obtido foi $\alpha_f = 0,002$; para o valor de $f_{tol} = 0,01$, o valor do parâmetro de corte de barras finas obtido foi $\alpha_f = 0,023$; e para o valor de $f_{tol} = 0,1$, o valor do parâmetro de corte de barras finas obtido foi $\alpha_f = 0,087$.

Figura 6.28 - Viga parede com furo com grade de nós para geração da malha de elementos de barra refinada:

(a) Solução topológica com $f_{tol} = 0,001$; (b) Identificação do estado de tensão com $f_{tol} = 0,001$; (c) Solução topológica com $f_{tol} = 0,01$; (d) Identificação do estado de tensão com $f_{tol} = 0,01$; (e) Solução topológica com $f_{tol} = 0,1$; (f) Identificação do estado de tensão com $f_{tol} = 0,1$



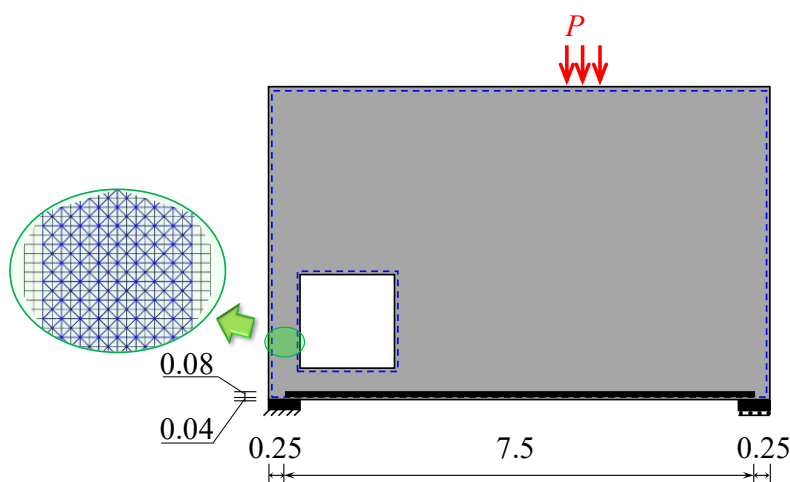
Verifica-se que a solução obtida com $f_{tol} = 0,1$, apresentada na Figura 6.28 (e), teve a região abaixo do furo melhor definida, sem a presença de um membro inclinado formado por elementos contínuos e de barras.

É interessante observar que, embora tenha sido considerada uma malha inicial de elementos de barra mais refinada, com a presença de mais barras, a solução do processo de otimização se mostrou mais simples, com menos membros na solução final. Verifica-se também uma semelhança em relação às soluções obtidas para este exemplo com a formulação considerando múltiplos materiais, apresentadas no item 5.5.5.

Destaca-se, também, a facilidade de imposição de uma limitação de inclinação de membros tracionados, que representam as armaduras tracionadas de aço. Essa inclinação é controlada com a definição da malha inicial de elementos de barra. No caso das soluções da Figura 6.28, os membros tracionados tem inclinações iguais a 0° , 45° ou 90° .

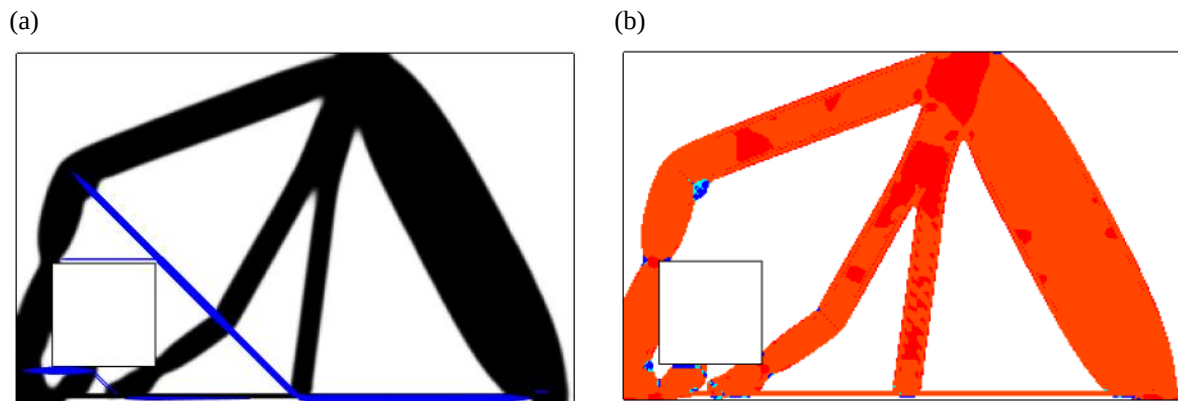
Este problema também foi solucionado considerando uma região passiva de elementos contínuos, indicada na Figura 6.29. O material que compõe a região passiva é um material elástico linear com módulo de elasticidade igual a 210 GPa e coeficiente de Poisson igual a 0,3. Foi utilizada a mesma malha híbrida descrita na Figura 6.27. e foi considerado um valor de $f_{tol} = 0,1$.

Figura 6.29 - Viga parede com furo: localização da região de elementos contínuos passivos e indicação da malha inicial de elementos de barra utilizada



A solução obtida é apresentada na Figura 6.30. O valor do parâmetro de corte obtido foi igual a 0,154.

Figura 6.30 - Viga parede com furo com grade de nós para geração da malha de elementos de barra refinada e consideração de região passiva de elementos contínuos: (a) Solução topológica com $f_{tol} = 0,1$; (b) Identificação do estado de tensão com $f_{tol} = 0,1$;

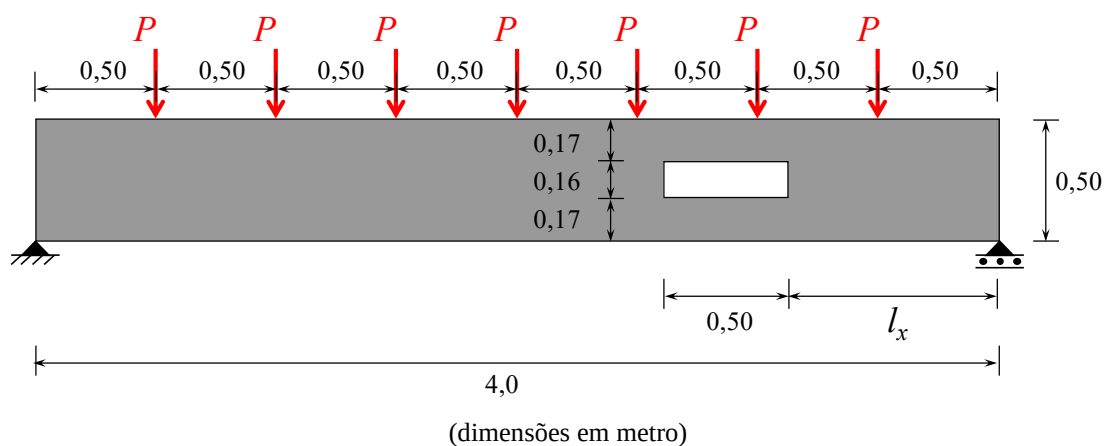


Não foi observado alterações significativas na solução obtida com a consideração da região passiva na viga parede, apresentada na Figura 6.30 (a), em relação à solução obtida sem a região passiva, apresentada na Figura 6.28 (e). Contudo, destaca-se que a consideração da região passiva fez com que algumas barras na região inferior da viga não surgissem, o que indica que a região passiva foi suficiente para resistir os esforços no local.

6.6.5. Exemplo 05: Viga biapoçada com abertura

A Figura 6.31 apresenta a geometria do problema e as condições de contorno adotadas. O domínio contínuo foi discretizado em uma malha estruturada de elementos quadrados de dimensão igual a 0,005 m.

Figura 6.31 - Viga com abertura: geometria e condições de contorno

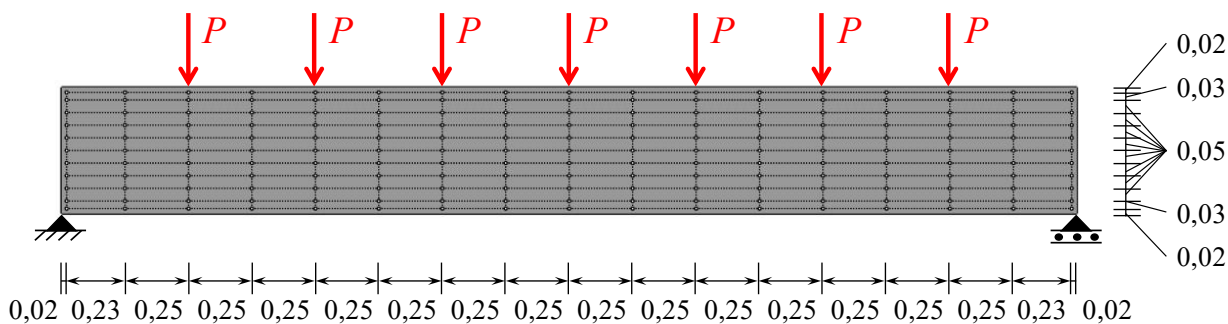


A fração de volume adotada foi igual a 50% do volume do domínio estendido e raio do filtro de densidade é igual a 0,02 m. O valor do parâmetro de controle do filtro de eliminação de barras finas f_{tol} é igual a 0,001.

O problema foi solucionado sem e com a presença da abertura em três posições distintas, com l_x igual a 1,75 m; 1,0 m e 0,5 m. São as mesmas posições analisadas na solução deste exemplo no item 5.5.6, utilizando a formulação de múltiplos materiais, cujas soluções são apresentadas na Figura 5.30.

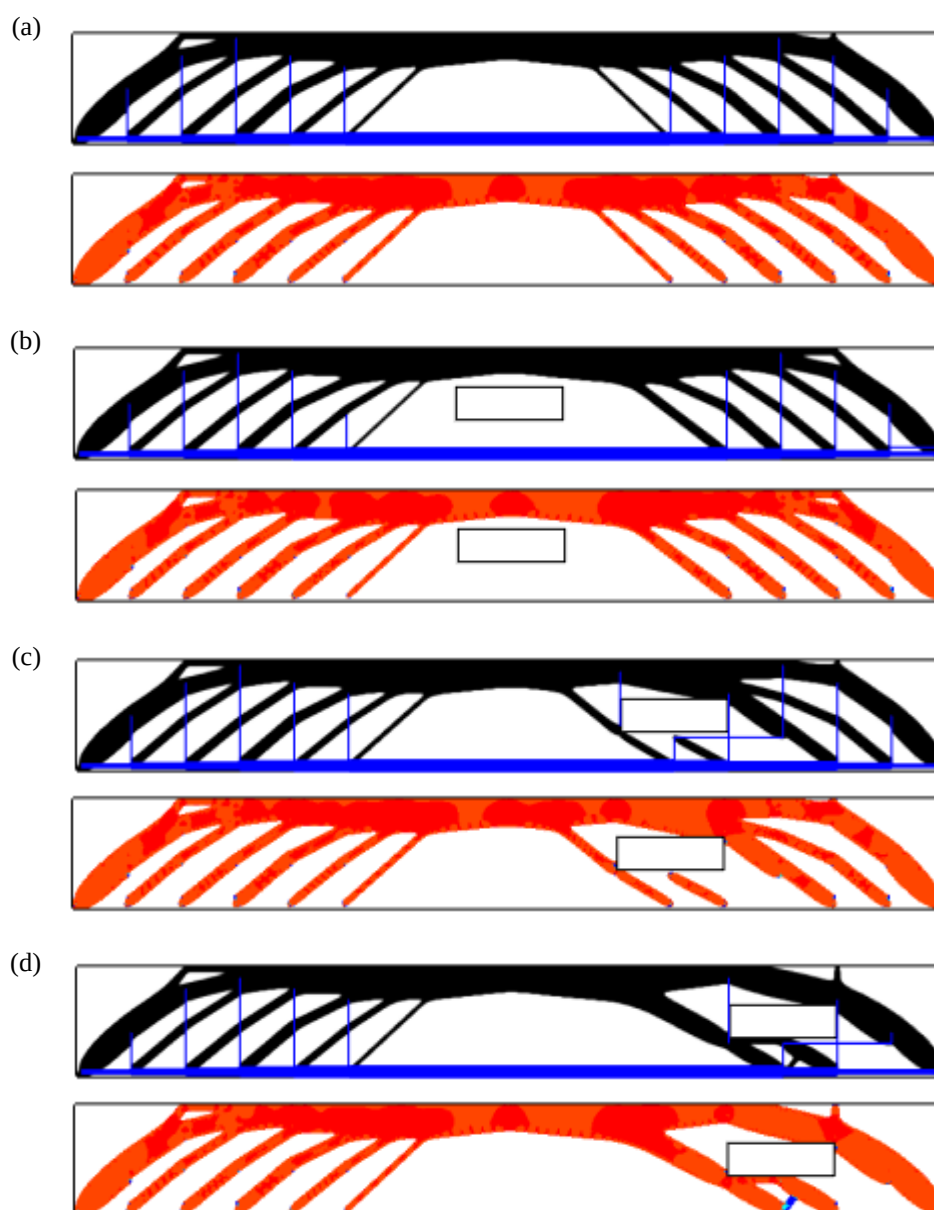
A malha inicial de elementos de barra é gerada a partir da grade de nós apresentada na Figura 6.32 e considerando um nível de conectividade igual a 1. Para os casos com a presença da abertura, foram eliminadas as barras iniciais que estavam presentes no interior da abertura. Além disso, neste exemplo foi explorada a possibilidade de limitar os caminhos de força de tração no interior da estrutura a inclinações iguais a 0° e 90° . Isso foi feito através da definição da malha inicial de elementos de barra sem a presença de barras com inclinações diferentes desses ângulos.

Figura 6.32 – Viga com abertura: grade de nós utilizada para geração da malha de elementos de barra



As soluções obtidas são apresentadas na Figura 6.33.

Figura 6.33 – Viga biapoiada com abertura – soluções topológicas e identificação do estado de tensão dos elementos contínuos: (a) Sem presença de abertura; (b) Com abertura e $l_x = 1,75$ m; (c) Com abertura e $l_x = 1,0$ m; (d) Com abertura e $l_x = 0,5$ m



É interessante comparar as soluções deste problema obtidas pela formulação híbrida, apresentadas na Figura 6.33, com as soluções obtidas pela formulação considerando múltiplos materiais, apresentadas na Figura 5.30. Com a malha inicial de elementos de barra utilizada, foi possível evitar a formação de membros com ângulos agudos. Além disso, observa-se que os caminhos de força de compressão também passam a ter uma geometria mais simples, sem a presença de membros curvos.

Por fim, destaca-se que as soluções obtidas neste exemplo com uso da formulação híbrida são mais próximas dos caminhos de força usualmente idealizados no interior de vigas de concreto armado, para realização do seu dimensionamento utilizando uma analogia de treliça.

CAPÍTULO 7

CONCLUSÕES E PROPOSTAS PARA TRABALHOS FUTUROS

Este trabalho apresentou um estudo sobre a influência do uso de modelos constitutivos elásticos não-lineares na obtenção de caminhos de força em elementos de concreto armado. Foram considerados dois tipos de materiais com comportamento elástico não-linear: materiais com e sem a presença de um limite de tensão. Para cada tipo de material foi apresentado o tipo de formulação do problema de otimização mais adequada, entre as já existentes na literatura.

O **Capítulo 2** apresentou os conceitos básicos relacionados à concepção do problema de otimização topológica com a abordagem do Método da Densidade.

No **Capítulo 3** foi apresentada a formulação do problema de otimização para ser utilizada em estruturas, sujeitas a pequenos deslocamentos e pequenas deformações, compostas por um único material sem a presença de um limite de tensão. Foram apresentados dois modelos constitutivos que podem ser utilizados nesta formulação: um modelo constitutivo bilinear e um modelo constitutivo hiperelástico. A implementação de ambos modelos constitutivos foi validada através de exemplos numéricos da literatura. Foi observado que, com o uso de materiais com comportamento elástico não-linear, a solução topológica torna-se dependente dos parâmetros dos materiais. E com o uso do modelo constitutivo hiperelástico, verifica-se, também, uma dependência da solução em função do nível de carregamento.

No **Capítulo 4** foi apresentada a formulação do problema de maximização da energia interna de deformação. Essa é indicada a ser utilizada em problemas em que o comportamento da estrutura apresenta um limite de resistência, o qual é dado, no caso deste trabalho, pelo uso de um modelo constitutivo com limite de tensão. O modelo constitutivo elástico não-linear utilizado é o proposto por Pasquali (2008), o qual aproxima-se assintoticamente de um material elastoplástico perfeito com o critério de von Mises. Para solucionar o problema da análise estrutural, foi adotada proposta de Zhao, Ramos Jr. e Paulino (2019) de utilizar um controle de energia para solução do sistema de equações não-lineares. A implementação computacional foi validada com um exemplo da literatura. Uma dificuldade encontrada no uso desta formulação

consiste na calibração dos parâmetros tanto da análise, que é a energia prescrita, quanto da otimização, que são os parâmetros do esquema de atualização utilizado, o OC.

No **Capítulo 5** foram apresentadas duas formulações de problemas de otimização topológica considerando múltiplos materiais com comportamento elástico não-linear e múltiplas restrições de volume: uma utilizando a maximização da energia potencial total estacionária e outra utilizando a maximização da energia interna de deformação. Para solucionar o problema de otimização foi utilizada a versão modificada do ZPR, em que foi incorporada a separação de sensibilidade no esquema de atualização de variáveis de projeto. A implementação computacional do problema de maximização da energia potencial total estacionária foi validada através de um exemplo da literatura.

Foi proposto o uso da formulação considerando múltiplos materiais e múltiplas restrições de volume, considerando materiais candidatos com comportamento bilinear e adotando o problema de maximização da energia potencial total estacionária, para obter a representação dos caminhos de força no interior de estruturas de concreto armado. Foi verificado que a consideração de regiões passivas em regiões que tipicamente se tem um reforço com barras de aço influencia a solução obtida. Observou-se, também, que o uso de mais de um material representando o concreto, em que um possua uma rigidez à tração mais elevada, não altera os caminhos de força obtidos.

Este trabalho, também, apresentou a formulação de múltiplos materiais e múltiplas restrições de volume, considerando materiais candidatos com um modelo constitutivo que apresenta um limite de tensão e adotando o problema de otimização de maximização da energia interna de deformação. Foi verificado que pode ser explorado o uso deste modelo constitutivo com limite de tensão, que possui o mesmo comportamento em tração e em compressão, para obter a representação do caminho de forças no interior de estruturas de concreto armado, desde que seja considerado um outro material candidato com o comportamento bilinear.

Foi analisado, também, um exemplo utilizando a formulação considerando múltiplos materiais e múltiplos restrições de volume com o problema de maximização da energia interna de deformação em que os dois materiais candidatos eram definidos pelo modelo constitutivo com limite de tensão. Nesse exemplo, observou-se a variação da topologia obtida e alocação dos materiais em função do valor de energia prescrita.

No **Capítulo 6** foi apresentada a proposta deste trabalho para a formulação híbrida do problema de otimização topológica considerando o comportamento não-linear dos materiais. Foi proposta uma forma alternativa de geração da malha híbrida de elementos finitos, quando se tem a presença de elementos finitos poligonais, fazendo uso do código educacional `PolyMesher` (TALISCHI *et al.*, 2012b). Foi proposto também, uma forma de filtragem para eliminação das barras finas com o uso do algoritmo do Passo Constante, diferente do trabalho de Oliveira (2021), que utilizou o método da Bisseção.

Com o exemplo de uma coluna com uma carga no topo de compressão, verificou-se que o modelo constitutivo bilinear proposto por Du *et al.* (2016) consegue captar o efeito de espraçamento de tensões e é apropriado para o uso na formulação híbrida com o intuito de obter os caminhos de força no interior de estruturas de concreto armado.

Observou-se, também, que as soluções obtidas pela formulação híbrida são dependentes da malha inicial de elementos de barra. Como forma de evitar esse problema, foi proposto o uso de malhas iniciais de elementos de barra geradas através de grades de nós refinadas.

Além disso, foram apresentados dois exemplos, o de um consolo curto e o de uma viga parede com furo, em que foram consideradas regiões passivas. No exemplo da viga parede a presença da região passiva não alterou significativamente a topologia obtida. Porém, no exemplo do consolo, as regiões passivas consideradas alteraram significativamente a solução obtida.

Por fim, destaca-se que a formulação híbrida, no contexto de obtenção de caminhos de força no interior de estruturas de concreto armado, apresenta vantagens em relação à formulação de múltiplos materiais e múltiplas restrições. Em elementos de concreto armado cuja hipótese de Bernoulli não pode ser considerada, o dimensionamento é, geralmente, realizado utilizando modelos de bielas e tirantes (MBT). Esses modelos podem ser idealizados a partir da representação dos caminhos de força no interior da estrutura a partir as soluções de otimização topológica. Porém, os MBT devem atender uma série de critérios, como, por exemplo, uma limitação da inclinação da biela comprimida. Assim, destaca-se que, com a formulação híbrida é possível de forma direta impor restrições aos caminhos de força de tração, sem a imposição de nenhum tipo de restrição ao problema de otimização ou consideração de uma função de mapeamento adicional às variáveis de projeto. Esses caminhos de força de tração limitados são definidos a partir malha inicial de elementos de barra adotada.

Há ainda espaço para prosseguimento da pesquisa em trabalhos futuros. Como sugestão são propostos os seguintes estudos:

- ◆ Aplicar o modelo constitutivo elástico não-linear utilizado por Zhao *et al.* (2020), que simula o do critério de escoamento de Drucker-Prager, na formulação com múltiplos materiais e múltiplas restrições de volume e na formulação híbrida utilizando o problema de otimização da maximização da energia interna de deformação;
- ◆ Definir um material elástico com comportamento bilinear, semelhante ao apresentado no item 3.2.1 deste trabalho, porém com a inclusão de um limite de tensão (*tension cut-off*);
- ◆ Propor o uso de outra função de interpolação para penalização da mistura de materiais. A função de interpolação utilizada neste trabalho é baseada no DMO e exige que sejam definidas variáveis de projeto associadas à cada um dos materiais para todos os elementos. Um ponto de partida pode ser a tentativa de uma adaptação da função proposta por Kiyono, Silva e Reddy (2017), que assim como o DMO, é aplicada no contexto da otimização da orientação de fibras em um meio contínuo;
- ◆ Aplicar a formulação com múltiplos materiais e múltiplas restrições de volume e a formulação híbrida com em problemas considerando múltiplos casos de carregamento;
- ◆ Definir uma metodologia para a definição e seleção do melhor MBT a partir da representação dos caminhos de força pelas soluções obtidas utilizando as diferentes abordagens apresentadas neste trabalho: formulações com um único material; formulações com múltiplos materiais e múltiplas restrições de volume; e a formulação híbrida.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, S. R. M.; PAULINO, G. H.; SILVA, E. C. N. Layout and material gradation in topology optimization of functionally graded structures: A global-local approach. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 42, n. 6, p. 855–868, 2010.
- ALTAIR. **Topology Optimization Software** | Altair. Disponível em: <<https://www.altair.com/topology-optimization/>>. Acesso em: 19 jul. 2021.
- AMIR, O.; SHAKOUR, E. Simultaneous shape and topology optimization of prestressed concrete beams. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 57, n. 5, p. 1831–1843, 2018.
- AMIR, O.; SIGMUND, O. Reinforcement layout design for concrete structures based on continuum damage and truss topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 47, n. 2, p. 157–174, 2013.
- ANDREASSEN, E.; CLAUSEN, M.; SCHENEVELS, M.; LAZAROV, B. S.; SIGMUND, O. Efficient topology optimization in MATLAB using 88 lines of code. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 43, n. 1, p. 1–16, 2011.
- ASARO, R. J.; LUBARDA, V. A. **Mechanics of Solids and Materials**. New York: Cambridge University Press, 2006.
- ASCHER, U. M.; GREIF, C. **A First Course in Numerical Methods**. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2011.
- BEGHINI, L. L.; BEGHINI, A.; BAKER, W. F.; PAULINO, G. H.. Integrated Discrete/Continuum Topology Optimization Framework for Stiffness or Global Stability of High-Rise Buildings. **Journal of Structural Engineering (United States)**, v. 141, n. 8, p. 1–10, 2015.
- BENDSØE, M. P. Optimal shape design as a material distribution problem. **Structural Optimization**, v. 1, n. 4, p. 193–202, 1989.
- BENDSØE, M. P.; KIKUCHI, N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 71, n. 2, p. 197–224, 1988.
- BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O. **Topology optimization: theory, methods and applications**. 2. ed. Berlin: Springer, 2004.
- BOGOMOLNY, M.; AMIR, O. Conceptual design of reinforced concrete structures using topology optimization with elastoplastic material modeling. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 2012.

BONET, J.; WOOD, R. D. **Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis**. 2. ed. New York: Cambridge University Press, 2008.

BOURDIN, B. Filters in topology optimization. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 50, n. May 2000, p. 2143–2158, 2001.

BRUNS, T. E.; TORTORELLI, D. A. Topology optimization of geometrically nonlinear structures and compliant mechanisms. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, p. 1874–1882, 2001.

CHEN, Q.; ZHANG, X.; ZHU, B. A 213-line topology optimization code for geometrically nonlinear structures. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 59, n. 5, p. 1863–1879, 2019.

CHI, H.; RAMOS, D. L.; RAMOS JR., A. S.; PAULINO, G. H. On structural topology optimization considering material nonlinearity: Plane strain versus plane stress solutions. **Advances in Engineering Software**, v. 131, n. March 2018, p. 217–231, 2019.

CHRISTENSEN, P. W.; KLARBRING, A. **An Introduction to Structural Optimization**. Berlin: Springer Science, 2009.

COMSOL. **Software de Simulação para Otimização - Melhore Seus Projetos de Engenharia**. Disponível em: <<https://br.comsol.com/optimization-module>>. Acesso em: 19 jul. 2021.

COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M. E.; WITT, R. J. **Concepts and Applications of finite element analysis**. 4. ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 2002. v. 2

DARWIN, D.; PECKNOLD, D. A. W. **Inelastic model for cyclic biaxial loading of reinforced concrete**. Urbana: University of Illinois, 1974.

DASSAULT SYSTÈMES. **Topology Optimization | TOSCA - Dassault Systèmes®**. Disponível em: <<https://www.3ds.com/products-services/simulia/products/tosca/structure/topology-optimization/>>. Acesso em: 19 jul. 2021.

DEATON, J. D.; GRANDHI, R. V. A survey of structural and multidisciplinary continuum topology optimization: Post 2000. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 49, n. 1, p. 1–38, 2014.

DENNIS JR, J. E.; SCHNABEL, R. B. **Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations**. 2 nd ed. N.J.: Prentice Hall, 1996.

DU, Z.; ZHANG, Y.; ZHANG, W.; GUO, X. A new computational framework for materials with different mechanical responses in tension and compression and its applications. **International Journal of Solids and Structures**, v. 100–101, p. 54–73, 2016.

DU, Z.; ZHANG, W.; ZHANG, Y.; XUE, R.; GUO, X. Structural topology optimization involving bi-modulus materials with asymmetric properties in tension and compression. **Computational Mechanics**, v. 63, n. 2, p. 335–363, 2019

EL DEBS, M. K. **Concreto Pré-Moldado: Fundamentos e Aplicações**. 2. ed. São Paulo: Oficina de Textos, 2017.

FERRARI, F.; SIGMUND, O. A new generation 99 line Matlab code for compliance topology optimization and its extension to 3D. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 62, n. 4, p. 2211–2228, 2020.

FERRARI, F.; SIGMUND, O.; GUEST, J. K. Topology optimization with linearized buckling criteria in 250 lines of Matlab. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 63, p. 3045–3066, 2021.

FOX, R. L.; KAPOOR, M. P. Rates of change of eigenvalues and eigenvectors. **AIAA Journal**, v. 6, n. 12, p. 2426–2429, 1968.

GAYNOR, A. T.; GUEST, J. K.; MOEN, C. D. Reinforced concrete force visualization and design using bilinear truss-continuum topology optimization. **Journal of Structural Engineering (United States)**, v. 139, n. 4, p. 607–618, 2013.

GIRALDO-LONDOÑO, O.; MIRABELLA, L.; DALLORO, L.; PAULINO, G. H. Multi-material thermomechanical topology optimization with applications to additive manufacturing: Design of main composite part and its support structure. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 363, p. 112812, 2020.

GIRALDO-LONDOÑO, O.; PAULINO, G. H. Fractional topology optimization of periodic multi-material viscoelastic microstructures with tailored energy dissipation. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 372, p. 113307, 2020.

GROENWOLD, A. A.; ETMAN, L. F. P. On the equivalence of optimality criterion and sequential approximate optimization methods in the classical topology layout problem. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 73, n. 3, p. 297–316, 2008.

GUEST, J. K.; PRÉVOST, J. H.; BELYTSCHKO, T. Achieving minimum length scale in topology optimization using nodal design variables and projection functions. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 61, n. 2, p. 238–254, 2004.

HACKETT, R. M. **Hyperelasticity primer**. 2. ed. [s.l.] Springer, 2018.

HILL, R. **The Mathematical Theory of Plasticity**. New York: Oxford University Press, 1998.

HOLZAPFEL, G. **Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum Approach for Engineering Science** *Meccanica*, 2002.

IVARSSON, N.; WALLIN, M.; AMIR, O.; TORTORELLI, D. A. Plastic work constrained elastoplastic topology optimization. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 122, n. 16, p. 4354–4377, 2021.

KIYONO, C. Y.; SILVA, E. C. N.; REDDY, J. N. A novel fiber optimization method based on normal distribution function with continuously varying fiber path. **Composite Structures**, v. 160, p. 503–515, 2017.

KLARBRING, A.; STRÖMBERG, N. A note on the min-max formulation of stiffness optimization including non-zero prescribed displacements. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 45, n. 1, p. 147–149, 2012.

- LI, P.; WU, Y.; YVONNET, J. A SIMP-phase field topology optimization framework to maximize quasi-brittle fracture resistance of 2D and 3D composites. **Theoretical and Applied Fracture Mechanics**, v. 114, n. January, 2021.
- LONDOÑO, O. G.; PAULINO, G. H. PolyStress: a Matlab implementation for local stress-constrained topology optimization using the augmented Lagrangian method. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, 2021a.
- LONDOÑO, O. G.; PAULINO, G. H. PolyDyna : a Matlab implementation for topology optimization of structures subjected to dynamic loads. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, 2021b.
- MARJUGI, S. M.; LEONG, W. J. Diagonal hessian approximation for limited memory quasi-newton via variational principle. **Journal of Applied Mathematics**, v. 2013, 2013.
- MUKHERJEE, S.; LU, D.; RAGHAVAN, B.; BREITKOPF, P.; DUTTA, S. XIAO, M.; ZHANG, W. Accelerating Large-scale Topology Optimization: State-of-the-Art and Challenges. **Archives of Computational Methods in Engineering**, v. 28, n. 7, p. 4549–4571, 2021.
- NTOPOLOGY. **Topology Optimization Software | nTopology**. Disponível em: <<https://ntopology.com/topology-optimization-software/>>. Acesso em: 19 jul. 2021.
- OLIVEIRA, L. F. **Formulação híbrida para a obtenção dos caminhos de força em estruturas de concreto armado utilizando otimização de topologia e elementos finitos poligonais**. Goiânia: Universidade Federal de Goiás, 2021.
- PASQUALI, P. ROBERTO Z. **Análise Limite de Estruturas Através de uma Formulação em Elasticidade Não-Linear**. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2008.
- PEREIRA, A.; TALISCHI, C.; PAULINO, G. H., MENEZES, I. F. M.; CARVALHO, M. S. Fluid flow topology optimization in PolyTop: stability and computational implementation. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 54, n. 5, p. 1345–1364, 2016.
- PICELLI, R.; SIVAPURAM, R.; XIE, Y. M. A 101-line MATLAB code for topology optimization using binary variables and integer programming. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 63, n. 2, p. 935–954, 2021.
- RAMOS, A. S.; PAULINO, G. H. Convex topology optimization for hyperelastic trusses based on the ground-structure approach. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 51, n. 2, p. 287–304, 2015.
- ROZVANY, G. I. N. A critical review of established methods of structural topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 37, n. 3, p. 217–237, 2009.
- RUSS, J. B.; WAISMAN, H. Topology optimization for brittle fracture resistance. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 347, p. 238–263, 2019.
- RUSS, J. B.; WAISMAN, H. A novel topology optimization formulation for enhancing fracture resistance with a single quasi-brittle material. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 121, n. 13, p. 2827–2856, 2020.

SANDERS, E. D.; PEREIRA, A.; AGUILÓ, M.; PAULINO, G. H. PolyMat: an efficient Matlab code for multi-material topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 58, n. 6, p. 2727–2759, 2018.

SANDERS, E. D.; AGUILÓ, M. A.; PAULINO, G. H. Multi-material continuum topology optimization with arbitrary volume and mass constraints. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 340, p. 798–823, 2018.

SANDERS, E. D.; PEREIRA, A.; PAULINO, G. H. Optimal and continuous multilattice embedding. **Science Advances**, v. 7, n. 16, p. 1–14, 2021.

SANDERS, E. D.; RAMOS, A. S.; PAULINO, G. H. A maximum filter for the ground structure method: An optimization tool to harness multiple structural designs. **Engineering Structures**, v. 151, p. 235–252, 2017.

SANDERS, E. D.; RAMOS, A. S.; PAULINO, G. H. Topology optimization of tension-only cable nets under finite deformations. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 62, n. 2, p. 559–579, 2020.

SCHLAICH, J.; SCHÄFER, K. Design and detailing of structural concrete using strut-and-tie models. **The Structural Engineer**, v. 69, n. 6, 1991.

SCHWARZ, S.; MAUTE, K.; RAMM, E. Topology and shape optimization for elastoplastic structural response. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, n. 15–17, p. 2135–2155, 2001.

SIGMUND, O. **Design of material structures using topology optimization**. Lyngby, Denmark: Technical University of Denmark, 1994.

SIGMUND, O. A 99 line topology optimization code written in matlab. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 21, n. 2, p. 120–127, 2001a.

SIGMUND, O. Design of multiphysics actuators using topology optimization - Part I: One-material structures. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, n. 49–50, p. 6577–6604, 2001b.

SIGMUND, O.; MAUTE, K. Topology optimization approaches: A comparative review. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 48, n. 6, p. 1031–1055, 2013.

SIGMUND, O.; PETERSSON, J. Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima. **Structural Optimization**, v. 16, n. 1, p. 68–75, 1998.

SIVAPURAM, R.; PICELLI, R. Topology optimization of binary structures using Integer Linear Programming. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 139, n. July 2017, p. 49–61, 2018.

STEGMANN, J.; LUND, E. Discrete material optimization of general composite shell structures. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 62, n. 14, p. 2009–2027, 2005.

- STOIBER, N.; KROMOSER, B. Topology optimization in concrete construction: a systematic review on numerical and experimental investigations. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 64, n. 4, p. 1725–1749, 2021.
- STROMBERG, L. L.; BEGHINI, A.; BAKER, W. F.; PAULINO, G. H. Application of layout and topology optimization using pattern gradation for the conceptual design of buildings. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 43, n. 2, p. 165–180, 2011.
- STROMBERG, L. L.; BEGHINI, A.; BAKER, W. F.; PAULINO, G. H. Topology optimization for braced frames: Combining continuum and beam/column elements. **Engineering Structures**, v. 37, p. 106–124, 2012.
- SVANBERG, K. The method of moving asymptotes - a new method for structural optimization. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 24, n. October 1985, p. 359–373, 1987.
- TALISCHI, C.; PAULINO, G. H.; PEREIRA, A.; MENEZES, I. F. M. Polygonal finite elements for topology optimization: A unifying paradigm. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 82, n. December, p. 671–698, 2009.
- TALISCHI, C.; PAULINO, G. H.; PEREIRA, A.; MENEZES, I. F. M. PolyTop: A Matlab implementation of a general topology optimization framework using unstructured polygonal finite element meshes. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 45, n. 3, p. 329–357, 2012a.
- TALISCHI, C.; PAULINO, G. H.; PEREIRA, A.; MENEZES, I. F. M. PolyMesher: A general-purpose mesh generator for polygonal elements written in Matlab. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 45, n. 3, p. 309–328, 2012b.
- TALISCHI, C.; PAULINO, G. H.; LE, C. H. Honeycomb Wachspress finite elements for structural topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 37, n. 6, p. 569–583, 2009.
- TOPOPT. **Interactive 3D TopOpt App - TopOpt**. Disponível em: <<https://www.topopt.mek.dtu.dk/Apps-and-software/Interactive-3D-TopOpt-App>>. Acesso em: 19 jul. 2021.
- WANG, C.; ZHAO, Z.; ZHOU, M.; SIGMUND, O.; ZHANG, X. S. A comprehensive review of educational articles on structural and multidisciplinary optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 64, n.5, p. 2827–2880, 2021.
- WANG, F.; LAZAROV, B. S.; SIGMUND, O. On projection methods, convergence and robust formulations in topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 43, n. 6, p. 767–784, 2011.
- WU, J.; SIGMUND, O.; GROEN, J. P. Topology optimization of multi-scale structures: a review. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 63, n. 3, p. 1455–1480, 2021.
- ZEGARD, T.; PAULINO, G. H. GRAND — Ground structure based topology optimization for arbitrary 2D domains using MATLAB. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 50, n. 5, p. 861–882, 2014.

ZEGARD, T.; PAULINO, G. H. GRAND3 — Ground structure based topology optimization for arbitrary 3D domains using MATLAB. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 52, n. 6, p. 1161–1184, 2015.

ZHANG, X. S.; RAMOS, A. S.; PAULINO, G. H. Material nonlinear topology optimization using the ground structure method with a discrete filtering scheme. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 55, n. 6, p. 2045–2072, 2017.

ZHANG, X. S.; CHI, H. Efficient multi-material continuum topology optimization considering hyperelasticity: Achieving local feature control through regional constraints. **Mechanics Research Communications**, v. 105, p. 46–48, 2020.

ZHANG, X. S.; CHI, H.; PAULINO, G. H. Adaptive multi-material topology optimization with hyperelastic materials under large deformations: A virtual element approach. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 370, p. 112976, 2020.

ZHANG, X. S.; PAULINO, G. H.; RAMOS, A. S. Multimaterial topology optimization with multiple volume constraints: Combining the ZPR update with a ground-structure algorithm to select a single material per overlapping set. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 114, n. 10, p. 1053–1073, 2018a.

ZHANG, X. S.; PAULINO, G. H.; RAMOS, A. S. Multi-material topology optimization with multiple volume constraints: a general approach applied to ground structures with material nonlinearity. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 57, n. 1, p. 161–182, 2018b.

ZHAO, T.; LAGES, E. N.; RAMOS JR., A. S.; PAULINO, G. H. Topology optimization considering the Drucker–Prager criterion with a surrogate nonlinear elastic constitutive model. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 62, n. 6, p. 3205–3227, 2020.

ZHAO, T.; RAMOS, A. S.; PAULINO, G. H. Material nonlinear topology optimization considering the von Mises criterion through an asymptotic approach: Max strain energy and max load factor formulations. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 118, n. 13, p. 804–828, 2019.

ZHOU, M.; ROZVANY, G. I. N. The COC algorithm, Part II: Topological, geometrical and generalized shape optimization. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 89, n. 1–3, p. 309–336, 1991.

ZHU, B.; ZHANG, X.; LI, J.; WANG, R.; LI, H.; NISHIWAKI, S. An 89-line code for geometrically nonlinear topology optimization written in FreeFEM. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 63, n. 2, p. 1015–1027, 2021.

APÊNDICE A

ESQUEMA DE ATUALIZAÇÃO DAS VARIÁVEIS

Este apêndice tem a finalidade de apresentar a formulação de um dos esquemas de atualização de variáveis de projeto utilizado neste trabalho, o critério de otimalidade (OC do inglês “*Optimality Criteria*”).

Para a dedução do método, considere um problema de otimização estrutural utilizando a formulação aninhada, como o apresentado em (A.1).

$$\begin{aligned}
 &\text{Obter:} && \mathbf{z} \\
 &\text{Que minimiza:} && f(\mathbf{z}) \\
 &\text{Tal que:} && g(\mathbf{z}) = \frac{\mathbf{A}^T \mathbf{y}}{\mathbf{A}^T \mathbf{I}} - V_{max} \leq 0 \\
 & && 0 < z_{min} \leq z_i \leq z_{max} \\
 &\text{Com:} && \mathbf{F}_{int}(\mathbf{z}, \mathbf{U}(\mathbf{z})) = \mathbf{F}_{ext}
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

Onde, $\mathbf{z}$ é o vetor de variáveis de projeto; f é a função objetivo; g é a função de restrição de volume; $\mathbf{A}$ corresponde ao vetor com as áreas dos elementos; V_{max} é o valor de fração de volume prescrita; z_{min} é o limite lateral inferior das variáveis de projeto; z_{max} é o limite lateral superior das variáveis de projeto; $\mathbf{F}_{int}$ corresponde ao vetor de forças internas nodais; $\mathbf{F}_{ext}$ corresponde ao vetor de forças externas nodais; e $\mathbf{U}$ corresponde ao vetor de deslocamentos nodais.

Com a função objetivo sendo uma função implícita das variáveis de projeto, conforme mencionado por Christensen e Klarbring (2009), uma forma de se obter a solução do problema de otimização é realizando uma solução sequencial iterativa a partir de uma aproximação do problema original (A.1). A aproximação do problema pode ser obtida a partir da linearização do mesmo. Para obter uma solução iterativa na forma do OC, utiliza-se uma variável intermediária, ou recíproca, definida em (A.2) (GROENWOLD; ETMAN, 2008; TALISCHI *et al.*, 2012a).

$$\bar{z}_i(z_i) = z_i^{-\alpha} \tag{A.2}$$

A aproximação da função objetivo é obtida a partir da linearização da mesma em relação à variável de intervenção, utilizando uma série de Taylor de primeira ordem, como apresentado em (A.3).

$$f(\mathbf{z}) \cong \bar{f}(\mathbf{z}) = f(\mathbf{z}^k) + \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{\partial f(\mathbf{z})}{\partial \bar{z}_i} \right)_{\mathbf{z}=\mathbf{z}^k} (\bar{z}_i(\mathbf{z}) - \bar{z}_i(\mathbf{z}^k)) \right] \quad (\text{A.3})$$

A derivada da função objetivo em relação à variável intermediária é calculada conforme apresentado em (A.4).

$$\frac{\partial f(\mathbf{z})}{\partial \bar{z}_i} = \frac{\partial f(\mathbf{z})}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial \bar{z}_i} \quad (\text{A.4})$$

A derivada de z_i em relação a $\bar{z}_i$ é dada por (A.5).

$$\frac{\partial z_i}{\partial \bar{z}_i} = \left(\frac{\partial \bar{z}_i}{\partial z_i} \right)^{-1} = \left[-\alpha (z_i)^{-\alpha-1} \right]^{-1} = -\frac{1}{\alpha} (z_i)^{1+\alpha} \quad (\text{A.5})$$

Substituindo as derivadas (A.5) e (A.4) em (A.3), tem-se (A.6).

$$\bar{f}(\mathbf{z}) = f(\mathbf{z}^k) + \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{\partial f(\mathbf{z})}{\partial z_i} \right)_{\mathbf{z}=\mathbf{z}^k} \left(-\frac{1}{\alpha} (z_i^k)^{1+\alpha} \right) \left((z_i)^{-\alpha} - (z_i^k)^{-\alpha} \right) \right] \quad (\text{A.6})$$

Deve-se, também, obter a aproximação da função de restrição de volume. Contudo, como a restrição de volume é uma função explícita das variáveis de projeto, esta aproximação é obtida por meio da linearização da função em relação a variável de projeto, conforme apresentado em (A.7).

$$g(\mathbf{z}) = \bar{g}(\mathbf{z}) = g(\mathbf{z}^k) + \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{\partial g(\mathbf{z})}{\partial z_i} \right)_{\mathbf{z}=\mathbf{z}^k} (z_i - z_i^k) \right] \quad (\text{A.7})$$

Note que, como a restrição de volume é uma função linear das variáveis de projeto, a representação desta em uma série de Taylor de primeira ordem é exata.

Por fim, tem-se um problema de otimização aproximado (A.8), sendo válido destacar que é são desprezados os termos constantes da aproximação da função objetivo pelo fato que eles não afetam a determinação do ponto estacionário da função.

Obter: $\mathbf{z}$

$$\text{Que minimiza: } \bar{f}(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{\partial f(\mathbf{z})}{\partial z_i} \right)_{\mathbf{z}=\mathbf{z}^k} \left(-\frac{1}{\alpha} (z_i^k)^{1+\alpha} \right) (z_i)^{-\alpha} \right] \quad (\text{A.8})$$

Tal que: $\bar{g}(\mathbf{z}) \leq 0$

$$0 < z_{\min} \leq z_i \leq z_{\max}$$

Com: $\mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{z}, \mathbf{U}(\mathbf{z})) = \mathbf{F}_{\text{ext}}$

No problema de otimização aproximado, apresentado em (A.8), a restrição de volume é uma função linear em relação ao vetor de variáveis de projeto, assim como em (A.1). Logo, para garantir a convexidade do problema de otimização aproximado, basta que a função objetivo também seja convexa. A função objetivo aproximada (A.6) é uma função linear em termos das variáveis intermediárias $\bar{z}_i$. Deste modo, caso o valor de α seja definido de forma adequada, é possível garantir que (A.2) seja uma função convexa e, conseqüentemente, a função objetivo aproximada, (A.6), e o problema de otimização aproximado, (A.8), sejam convexas (GROENWOLD; ETMAN, 2008).

Uma vez garantido que o problema (A.8) é convexo, as condições de KKT são necessárias e suficientes para definição da condição de otimalidade. Logo, define-se, primeiramente, a função lagrangeana do problema:

$$\mathcal{L}(\mathbf{z}, \phi) = \bar{f}(\mathbf{z}) + \phi \bar{g}(\mathbf{z}) \quad (\text{A.9})$$

Pela condição de otimalidade, tem-se:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{z}, \phi)}{\partial z_i} = \frac{\partial \bar{f}(\mathbf{z})}{\partial z_i} + \phi \frac{\partial \bar{g}(\mathbf{z})}{\partial z_i} = (z_i^k)^{1+\alpha} \left(\frac{\partial f(\mathbf{z})}{\partial z_i} \right)_{\mathbf{z}=\mathbf{z}^k} (z_i)^{-\alpha-1} + \phi \left(\frac{\partial g(\mathbf{z})}{\partial z_i} \right)_{\mathbf{z}=\mathbf{z}^k} = 0 \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{z}, \phi)}{\partial \phi} = \bar{g}(\mathbf{z}) = g(\mathbf{z}^k) + \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{\partial g(\mathbf{z})}{\partial z_i} \right)_{\mathbf{z}=\mathbf{z}^k} (z_i - z_i^k) \right] = 0 \quad (\text{A.11})$$

Solucionando a equação (A.10) em relação a z_i , obtém-se a expressão (A.12).

$$(z_i^k)^{1+\alpha} (z_i)^{-\alpha-1} = - \frac{\phi \left(\frac{\partial g(\mathbf{z})}{\partial z_i} \right)_{\mathbf{z}=\mathbf{z}^k}}{\left(\frac{\partial f(\mathbf{z})}{\partial z_i} \right)_{\mathbf{z}=\mathbf{z}^k}} \rightarrow z_i^* = z_i^k \left[- \frac{\left(\frac{\partial f(\mathbf{z})}{\partial z_i} \right)_{\mathbf{z}=\mathbf{z}^k}}{\phi \left(\frac{\partial g(\mathbf{z})}{\partial z_i} \right)_{\mathbf{z}=\mathbf{z}^k}} \right]^{\frac{1}{1+\alpha}} \quad (\text{A.12})$$

Definindo B_i em (A.13), chega-se a (A.14).

$$B_i(\phi) = - \frac{\left(\frac{\partial f(\mathbf{z})}{\partial z_i} \right)_{\mathbf{z}=\mathbf{z}^k}}{\phi \left(\frac{\partial g(\mathbf{z})}{\partial z_i} \right)_{\mathbf{z}=\mathbf{z}^k}} \quad (\text{A.13})$$

$$z_i^* = z_i^k (B_i(\phi))^{\frac{1}{1+\alpha}} \quad (\text{A.14})$$

É válido ressaltar que nos problemas de otimização deste trabalho em que o OC foi utilizado como esquema de atualização das variáveis de projeto, foi demonstrado que a sensibilidade da função objetivo é estritamente não-positiva e a sensibilidade da restrição de volume é positiva. Deste modo, o valor de B_i é sempre não-negativo, considerando que $\phi > 0$. Isso garante que em (A.14), para expoentes menores que 1, não se tenha valores imaginários, permitindo a aplicação do esquema de atualização.

Observe que z_i^* , em (A.14), é uma função do multiplicador de Lagrange. Para obtenção deste é aplicado o método da bisseção, de modo que z_i^* respeite a restrição de volume aproximada da equação (A.7). O algoritmo do OC é apresentado no final deste apêndice, entretanto, note em (A.13) e (A.14) que, se a restrição de volume for violada, para diminuir os valores das variáveis de projeto é necessário aumentar o valor do multiplicador de Lagrange.

Uma vez que ϕ e z_i^* são determinados, para obter o conjunto de variáveis atualizadas, deve-se satisfazer o conjunto de restrições laterais apresentado na equação (A.15).

$$z_i^{\text{new}} = \begin{cases} z_i^+, & z_i^* \geq z_i^+ \\ z_i^*, & z_i^- < z_i^* < z_i^+ \\ z_i^-, & z_i^* \leq z_i^- \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

Onde os limites laterais móveis são definidos em (A.16) e (A.17).

$$z_i^- = \max(z_i^{\min}, z_i^k - M) \quad (\text{A.16})$$

$$z_i^+ = \min(z_i^{\max}, z_i^k + M) \quad (\text{A.17})$$

Sendo que M corresponde a um limite móvel prescrito, o qual é usualmente definido como uma fração de $(z_i^{\max} - z_i^{\min})$. Bendsøe e Sigmund (2004) recomendam o valor de $M = 0,2$, o qual é popularmente usado devido ao trabalho de Sigmund (2001).

Os limites laterais móveis são definidos devido à natureza da aproximação da função objetivo em uma série de Taylor de primeira ordem, a qual tem uma precisão maior nas proximidades do ponto de referência ($\mathbf{z}^k$).

Na equação (A.14), o expoente de B_i é definido como um parâmetro de amortecimento η :

$$\eta = \frac{1}{1 + \alpha} \quad (\text{A.18})$$

O critério de convergência adotado é:

$$\max \left(\frac{|z_i^k - z_i^{k-1}|}{1 + z_i^{k-1}} \right) \leq \text{tolOC} \quad (\text{A.21})$$

Por fim, apresenta-se o algoritmo do OC, no Quadro A.1, adotando o método da bisseção para determinação do multiplicador de Lagrange.

Quadro A.1 - Algoritmo do esquema de atualização das variáveis de projeto com o OC

```
01: Inicializar:  $M, \eta, \phi_1 = 0$  e  $\phi_2 = 1e6$ 
02: Enquanto  $|\phi_1 - \phi_2| > 1e-8$ 
03:      $\phi_m = 0,5(\phi_1 + \phi_2)$ 
04:     Calcular  $B_i(\phi_m)$ , com (A.13)
05:     Calcular  $z_i(\phi_m)$ , com (A.14)
06:     Calcular  $z_i^{new}$ , com (A.15)
07:     Se  $\bar{g}(\mathbf{z}^{new}) > 0$ 
08:          $\phi_1 = \phi_m$ 
09:     Senão
10:          $\phi_2 = \phi_m$ 
11:     Fim se
12: Fim enquanto
```

APÊNDICE B

FORMULAÇÃO DE MODELO HIPERELÁSTICO SOBRE PEQUENAS DEFORMAÇÕES

Este apêndice tem o intuito de apresentar o processo de obtenção do tensor constitutivo tangente em sua forma espectral a partir de um modelo constitutivo hiperelástico descrito em termos dos alongamentos principais.

O tensor de deformações infinitesimais ($\boldsymbol{\varepsilon}$) escrito em sua forma espectral é apresentado em (B.1).

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{\alpha=1}^3 \bar{\varepsilon}_{\alpha} \mathbf{n}_{\alpha} \otimes \mathbf{n}_{\alpha} \quad (\text{B.1})$$

Onde, $\bar{\varepsilon}_{\alpha}$ é deformação principal e $\mathbf{n}_{\alpha}$ é direção principal α associada a $\bar{\varepsilon}_{\alpha}$.

No item Capítulo 3 deste trabalho foi demonstrado que, para um material isotrópico, o tensor de tensões de Cauchy pode ser escrito na forma espectral com as mesmas direções principais do tensor de deformações infinitesimais. Assim, tem-se (B.2).

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_{\alpha=1}^3 \bar{\sigma}_{\alpha} \mathbf{n}_{\alpha} \otimes \mathbf{n}_{\alpha} \quad (\text{B.2})$$

Sendo, $\bar{\sigma}_{\alpha}$ a tensão principal, a qual é obtida pela equação (B.3).

$$\bar{\sigma}_{\alpha} = \frac{\partial \Psi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)}{\partial \lambda_{\alpha}} \quad (\text{B.3})$$

A obtenção do tensor constitutivo tangente faz uso desta propriedade dos tensores de tensão e deformação serem decompostos ao longo das mesmas direções principais. Contudo, primeiro é necessário lembrar que o tensor constitutivo tangente fornece uma relação incremental entre os tensores de tensão e deformação, conforme apresentado na equação (B.4).

$$D\boldsymbol{\sigma}[\mathbf{U}] = \mathcal{C} : D\boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{U}] \quad (\text{B.4})$$

Onde $\mathcal{C}$ é o tensor constitutivo tangente e $D\boldsymbol{\sigma}[\mathbf{U}]$ e $D\boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{U}]$ correspondem às derivadas direcionais dos tensores de tensão de Cauchy e de deformações infinitesimais em relação ao vetor de deslocamentos, respectivamente.

Entretanto, em vez de linearizar os tensores de tensão e deformação em relação ao vetor de deslocamentos, para obter os incrementos dos mesmos presentes em (B.4), lineariza-se em relação ao vetor de velocidades. Isto é feito pois se sabe que a derivada direcional de um tensor em relação ao vetor de velocidades é igual à taxa do tensor (BONET; WOOD, 2008). Logo, é recomendável que a relação constitutiva tangente apresentada em (B.4) seja reescrita em termos das taxas dos tensores de tensão e deformação (B.5).

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathcal{C}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (\text{B.5})$$

A taxa do tensor de deformações infinitesimais é calculada conforme apresentado em (B.6).

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \sum_{\alpha=1}^3 \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{\alpha} \mathbf{n}_{\alpha} \otimes \mathbf{n}_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^3 \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\alpha} (\dot{\mathbf{n}}_{\alpha} \otimes \mathbf{n}_{\alpha} + \mathbf{n}_{\alpha} \otimes \dot{\mathbf{n}}_{\alpha}) \quad (\text{B.6})$$

Para calcular a taxa da direção principal $\mathbf{n}_{\alpha}$, considere que este vetor pode ser escrito a partir do vetor da base cartesiana por meio de uma operação de rotação (B.7), haja vista que ambos vetores são unitários.

$$\mathbf{n}_{\alpha} = \mathbf{Q} \mathbf{e}_{\alpha} \quad (\text{B.7})$$

Onde:

$$Q_{\alpha\beta} = \cos(\mathbf{e}_{\alpha}; \mathbf{n}_{\beta}) = \mathbf{e}_{\alpha} \cdot \mathbf{n}_{\beta} \quad (\text{B.8})$$

Portanto, a taxa do vetor $\mathbf{n}_{\alpha}$ pode ser reescrita como (B.9), uma vez que o vetor da base cartesiana $\mathbf{e}_{\alpha}$ é constante.

$$\dot{\mathbf{n}}_{\alpha} = \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{e}_{\alpha} \quad (\text{B.9})$$

Como o tensor $\mathbf{Q}$ é um tensor que representa uma operação de rotação, ele é um tensor ortogonal. Logo, utilizando (B.7), podemos reescrever (B.9) na forma (B.10).

$$\dot{\mathbf{n}}_{\alpha} = \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T \mathbf{n}_{\alpha} = \boldsymbol{\Omega}_0 \mathbf{n}_{\alpha} \quad (\text{B.10})$$

O tensor $\mathbf{\Omega}_0$ é um tensor antissimétrico. Isso pode ser demonstrado partindo da propriedade de ortogonalidade do tensor de rotação $\mathbf{Q}$, conforme apresentado em (B.11).

$$\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{I} \rightarrow \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{Q}}^T = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{\Omega}_0 = -\mathbf{\Omega}_0^T \quad (\text{B.11})$$

Substituindo (B.10) em (B.6), obtém-se (B.12).

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \sum_{\alpha=1}^3 \dot{\bar{\varepsilon}}_{\alpha} \mathbf{n}_{\alpha} \otimes \mathbf{n}_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^3 \bar{\varepsilon}_{\alpha} \left[\mathbf{\Omega}_0 \mathbf{n}_{\alpha} \otimes \mathbf{n}_{\alpha} + \mathbf{n}_{\alpha} \otimes (\mathbf{\Omega}_0 \mathbf{n}_{\alpha}) \right] \quad (\text{B.12})$$

Fazendo uso da propriedade (B.11), chega-se a (B.13).

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \sum_{\alpha=1}^3 \dot{\bar{\varepsilon}}_{\alpha} \mathbf{n}_{\alpha} \otimes \mathbf{n}_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^3 \bar{\varepsilon}_{\alpha} \left(\mathbf{\Omega}_0 \mathbf{n}_{\alpha} \otimes \mathbf{n}_{\alpha} - \mathbf{n}_{\alpha} \otimes \mathbf{n}_{\alpha} \mathbf{\Omega}_0 \right) \quad (\text{B.13})$$

Se adotarmos a representação espectral do tensor $\mathbf{\Omega}_0$, apresentada em (B.14), a taxa do tensor de deformações infinitesimais é, por fim, definida como (B.15).

$$\mathbf{\Omega}_0 = \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^3 \Omega_{\alpha\beta}^0 \mathbf{n}_{\alpha} \otimes \mathbf{n}_{\beta} \quad (\text{B.14})$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \sum_{\alpha=1}^3 \dot{\bar{\varepsilon}}_{\alpha} \mathbf{n}_{\alpha} \otimes \mathbf{n}_{\alpha} + \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^3 \Omega_{\alpha\beta}^0 \left(\bar{\varepsilon}_{\beta} - \bar{\varepsilon}_{\alpha} \right) \mathbf{n}_{\alpha} \otimes \mathbf{n}_{\beta} \quad (\text{B.15})$$

Observe que em (B.15) o somatório duplo está definido para valores de $\alpha \neq \beta$. O motivo é o fato de que o tensor $\mathbf{\Omega}_0$ é antissimétrico.

Fazendo um procedimento semelhante ao apresentado, a taxa do tensor de tensões de Cauchy é definida por (B.16).

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \frac{\partial \bar{\sigma}_{\alpha}}{\partial \bar{\varepsilon}_{\beta}} \dot{\bar{\varepsilon}}_{\beta} \mathbf{n}_{\alpha} \otimes \mathbf{n}_{\alpha} + \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^3 \Omega_{\alpha\beta}^0 \left(\bar{\sigma}_{\beta} - \bar{\sigma}_{\alpha} \right) \mathbf{n}_{\alpha} \otimes \mathbf{n}_{\beta} \quad (\text{B.16})$$

Como a taxa de ambos tensores são decompostos em termos da mesma base vetorial, conforme pode ser observado em (B.15) e (B.16), é possível determinar as componentes do tensor constitutivo tangente a partir da comparação dos termos das taxas dos tensores de tensão e de deformação. Para facilitar a comparação dos termos das taxas dos tensores, apresenta-se nas

equações (B.17) e (B.18) as taxas dos tensores de deformação e tensão em notação de Voigt, respectivamente. Considera-se a propriedade de simetria dos tensores.

$$\dot{\mathbf{\epsilon}} = \begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_{11} \\ \dot{\epsilon}_{22} \\ \dot{\epsilon}_{33} \\ \dot{\epsilon}_{12} + \dot{\epsilon}_{21} \\ \dot{\epsilon}_{13} + \dot{\epsilon}_{31} \\ \dot{\epsilon}_{23} + \dot{\epsilon}_{32} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\bar{\epsilon}}_1 \\ \dot{\bar{\epsilon}}_2 \\ \dot{\bar{\epsilon}}_3 \\ 2\Omega_{12}^0(\bar{\epsilon}_2 - \bar{\epsilon}_1) \\ 2\Omega_{13}^0(\bar{\epsilon}_3 - \bar{\epsilon}_1) \\ 2\Omega_{23}^0(\bar{\epsilon}_3 - \bar{\epsilon}_2) \end{Bmatrix} \quad (\text{B.17})$$

$$\dot{\mathbf{\sigma}} = \begin{Bmatrix} \dot{\sigma}_{11} \\ \dot{\sigma}_{22} \\ \dot{\sigma}_{33} \\ \dot{\sigma}_{12} \\ \dot{\sigma}_{13} \\ \dot{\sigma}_{23} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \bar{\sigma}_1}{\partial \bar{\epsilon}_1} \dot{\bar{\epsilon}}_1 + \frac{\partial \bar{\sigma}_1}{\partial \bar{\epsilon}_2} \dot{\bar{\epsilon}}_2 + \frac{\partial \bar{\sigma}_1}{\partial \bar{\epsilon}_3} \dot{\bar{\epsilon}}_3 \\ \frac{\partial \bar{\sigma}_2}{\partial \bar{\epsilon}_1} \dot{\bar{\epsilon}}_1 + \frac{\partial \bar{\sigma}_2}{\partial \bar{\epsilon}_2} \dot{\bar{\epsilon}}_2 + \frac{\partial \bar{\sigma}_2}{\partial \bar{\epsilon}_3} \dot{\bar{\epsilon}}_3 \\ \frac{\partial \bar{\sigma}_3}{\partial \bar{\epsilon}_1} \dot{\bar{\epsilon}}_1 + \frac{\partial \bar{\sigma}_3}{\partial \bar{\epsilon}_2} \dot{\bar{\epsilon}}_2 + \frac{\partial \bar{\sigma}_3}{\partial \bar{\epsilon}_3} \dot{\bar{\epsilon}}_3 \\ \Omega_{12}^0(\bar{\sigma}_2 - \bar{\sigma}_1) \\ \Omega_{13}^0(\bar{\sigma}_3 - \bar{\sigma}_1) \\ \Omega_{23}^0(\bar{\sigma}_3 - \bar{\sigma}_2) \end{Bmatrix} \quad (\text{B.18})$$

Note que em (B.17) as componentes cisalhantes do tensor de deformações infinitesimais nesta notação são indicadas pelas distorções angulares. Por fim, comparando os termos de (B.18) com os de (B.17), chega-se nas componentes do tensor constitutivo no sistema principal de deformação (B.19).

$$\mathbf{C}_p = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\sigma}_1}{\partial \bar{\varepsilon}_1} & \frac{\partial \bar{\sigma}_1}{\partial \bar{\varepsilon}_2} & \frac{\partial \bar{\sigma}_1}{\partial \bar{\varepsilon}_3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \bar{\sigma}_2}{\partial \bar{\varepsilon}_1} & \frac{\partial \bar{\sigma}_2}{\partial \bar{\varepsilon}_2} & \frac{\partial \bar{\sigma}_2}{\partial \bar{\varepsilon}_3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \bar{\sigma}_3}{\partial \bar{\varepsilon}_1} & \frac{\partial \bar{\sigma}_3}{\partial \bar{\varepsilon}_2} & \frac{\partial \bar{\sigma}_3}{\partial \bar{\varepsilon}_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{(\bar{\sigma}_2 - \bar{\sigma}_1)}{(\bar{\varepsilon}_2 - \bar{\varepsilon}_1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{(\bar{\sigma}_3 - \bar{\sigma}_1)}{(\bar{\varepsilon}_3 - \bar{\varepsilon}_1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{(\bar{\sigma}_3 - \bar{\sigma}_2)}{(\bar{\varepsilon}_3 - \bar{\varepsilon}_2)} \end{bmatrix} \quad (\text{B.19})$$

Por fim, a representação espectral do tensor constitutivo tangente é apresentada em (B.20).

$$\mathbf{C} = \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \frac{\partial \bar{\sigma}_\alpha}{\partial \bar{\varepsilon}_\beta} \mathbf{n}_\alpha \otimes \mathbf{n}_\alpha \otimes \mathbf{n}_\beta \otimes \mathbf{n}_\beta + \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^3 \frac{1}{2} \frac{(\bar{\sigma}_\beta - \bar{\sigma}_\alpha)}{(\bar{\varepsilon}_\beta - \bar{\varepsilon}_\alpha)} \mathbf{n}_\alpha \otimes \mathbf{n}_\beta \otimes (\mathbf{n}_\alpha \otimes \mathbf{n}_\beta + \mathbf{n}_\beta \otimes \mathbf{n}_\alpha) \quad (\text{B.20})$$

APÊNDICE C

VALIDAÇÃO DA IMPLEMENTAÇÃO DO MODELO BILINEAR

No item 3.5.1, foi definido o problema de otimização (C.1) para validar a implementação computacional do modelo bilinear:

Obter: $\theta_1, \theta_2, A_1, A_2$

Que minimiza: $f(\theta_1, \theta_2, A_1, A_2) = \frac{N_1^2 l}{E_1 A_1 \sin \theta_1} + \frac{N_2^2 l}{E_2 A_2 \sin \theta_2}$

Tal que: $\frac{A_1 l}{\sin \theta_1} + \frac{A_2 l}{\sin \theta_2} = V_0$ (C.1)

$$0 < \theta_i < \frac{\pi}{2}, i = 1, 2$$

Com: $N_1 \cos \theta_1 - N_2 \cos \theta_2 = 10$

$$N_1 \sin \theta_1 + N_2 \sin \theta_2 = 0$$

Conforme mencionado previamente no item 3.5.1, a solução do problema de otimização (C.1) é obtida utilizando a função `fmincon` do Matlab. Esta função é utilizada para solucionar problemas de programação não-linear da forma:

Obter: $\mathbf{x}$

Que minimiza: $f(\mathbf{x})$

Tal que: $c(\mathbf{x}) \leq 0$

$$c_{eq}(\mathbf{x}) = 0$$
 (C.2)

$$\mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{A}_{eq} \mathbf{x} = \mathbf{b}_{eq}$$

$$\mathbf{l}_b \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u}_b$$

Onde, $\mathbf{x}$ é o vetor de variáveis de projeto; f é a função objetivo, c é a função de restrição não-linear de desigualdade; c_{eq} é a função de restrição não-linear de igualdade; $\mathbf{A}$ é a matriz de coeficientes das restrições lineares de desigualdade; $\mathbf{b}$ é o vetor dos coeficientes das restrições

lineares de desigualdade; $\mathbf{A}_{eq}$ é a matriz de coeficientes das restrições lineares de igualdade; $\mathbf{b}_{eq}$ é o vetor de coeficientes das restrições lineares de igualdade; $\mathbf{l}_b$ é o vetor com os limites inferiores das variáveis de projeto; $\mathbf{u}_b$ é o vetor com os limites superiores das variáveis de projeto.

O vetor de variáveis de projeto é definido como $\mathbf{x} = [\theta_1, \theta_2, A_1, A_2]^T$.

Primeiro, define-se uma função para o cálculo da flexibilidade da estrutura, que corresponde à função objetivo:

Figura C.1 - Implementação do cálculo da função objetivo

```

1  function of = compliance(x)
2  %% Cálculo dos esforços normais nas barras
3  R = [cos(x(1))  -cos(x(2));
4       sin(x(1))   sin(x(2))];
5  P = [10; 0]; % Forças nas direções x e y
6  N = R\P; % Esforços normais
7  %% Parâmetros do problema
8  L = 1.0; % Largura do domínio (m)
9  E1 = 30.0e6; % Módulo de elasticidade da barra superior (kPa)
10 E2 = E1/8.0; % Módulo de elasticidade da barra inferior (kPa)
11 %% Cálculo da função objetivo: flexibilidade
12 of = N(1)^2*L/(E1*x(3)*sin(x(1))) + N(2)^2*L/(E2*x(4)*sin(x(2)));

```

Define-se, também, uma função para o cálculo das restrições não-lineares do problema. Embora o problema não possua restrições não-lineares de desigualdade, essa função deve retornar também uma variável com a restrição de restrição não-linear de desigualdade:

Figura C.2 – Implementação do cálculo das restrições não-lineares

```

1  function [c,ceq] = nlcon(x)
2  %% Restrições não-lineares de desigualdade
3  c = [];
4  %% Restrições não-lineares de igualdade
5  L = 1.0; % Largura do domínio
6  V0 = 0.004; % Volume prescrito
7  ceq = x(3)*L/sin(x(1)) + x(4)*L/sin(x(2)) - V0;
8  end

```

Para utilizar a função `fmincon`, foi feito o script apresentado na Figura C.3. Para os valores dos limites superiores das áreas foram adotados valores elevados, em relação à restrição de volume definida.

Figura C.3 - Script para chamada da função fmincon

```

1  %% Otimização da treliça de duas barras
2  % --- Parâmetros de entrada -----
3  L = 1.0; % Largura do domínio (m)
4  V0 = 0.004; % Restrição de volume (m³)
5  theta1_ini = pi/6; % Valor inicial de theta1
6  theta2_ini = pi/2; % Valor inicial de theta2
7  L1 = L/sin(theta1_ini); % Comprimento inicial da barra 1
8  L2 = L/sin(theta2_ini); % Comprimento inicial da barra 2
9  Lt = L1 + L2; % Comprimento total das barras
10 A_ini = V0/2*Lt; % Área inicial das barras
11 % --- Definição do problema de otimização -----
12 Objective = @compliance; % Função objetivo
13 x0 = [theta1_ini;theta2_ini;A_ini;A_ini]; % Valor inicial de [x]
14 A = []; b = []; % Restrições lineares de desig.
15 Aeq = []; beq = []; % Restrições lineares de igual.
16 lb = [0;0;0;0]; % Limite inferior de [x]
17 ub = [pi/2;pi/2;10;10]; % Limite superior de [x]
18 nonlincon = @nlcon; % Restrições não-lineares
19 % Solução do problema de otimização:
20 [x,fval] = fmincon(Objective,x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub,nonlincon);

```


APÊNDICE D

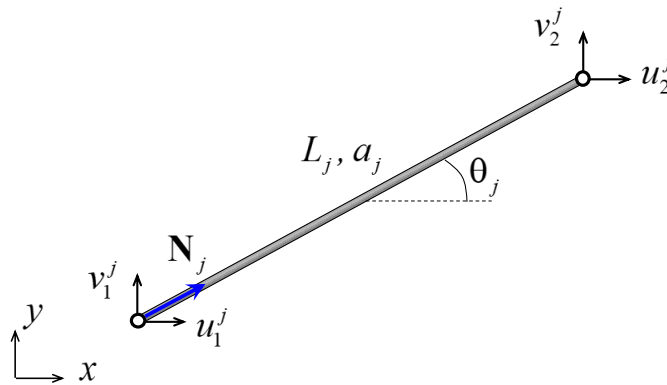
CONCEITOS BÁSICOS RELACIONADOS AO MÉTODO DA *GROUND STRUCTURE*

Este apêndice apresenta alguns conceitos e definições básicas relacionados ao Método da *Ground Structure* que são necessários para dar suporte ao entendimento da formulação híbrida, apresentada no Capítulo 6.

D.1. FORMULAÇÃO DO ELEMENTO DE BARRA

Considera-se uma barra j , de comprimento L_j , seção transversal de área a_j , inclinada em relação ao eixo x do plano cartesiano com um ângulo θ_j , conforme apresentado na Figura D.1.

Figura D.1 - Elemento de barra genérico de dois nós



Fonte: Adaptado de Christensen e Klarbring (2009)

O vetor $\mathbf{N}_j$ indicado na Figura D.1 consiste em um vetor unitário que fornece a orientação da barra em relação ao sistema global de coordenadas cartesianas, conforme apresentado em (D.1).

$$\mathbf{N}_j = \begin{bmatrix} \cos \theta_j \\ \sin \theta_j \end{bmatrix} \quad (\text{D.1})$$

O vetor de deslocamentos nodais associado ao elemento de barra j é definido como:

$$\mathbf{u}_j = [u_1^j \quad v_1^j \quad u_2^j \quad v_2^j]^T \quad (\text{D.2})$$

Assume-se a hipótese de pequenos deslocamentos e pequenas deformações, logo a medida de deformação utilizada é a deformação de engenharia, ε_j , a qual pode ser calculada por (D.3).

$$\varepsilon_j(\mathbf{u}_j) = \frac{\mathbf{R}_j \mathbf{u}_j}{L_j} \quad (\text{D.3})$$

Onde:

$$\mathbf{R}_j = \begin{bmatrix} -\mathbf{N}_j^T & \mathbf{N}_j^T \end{bmatrix} \quad (\text{D.4})$$

Considerando que a barra é composta por um material elástico não-linear, a tensão axial de Cauchy na barra, $\sigma_{b,j}$, é dada por:

$$\sigma_{b,j}(\mathbf{u}_j) = \frac{\partial \Psi_{b,0}(\mathbf{u}_j)}{\partial \varepsilon_j} \quad (\text{D.5})$$

Sendo $\Psi_{b,0}$ a função de energia de deformação específica do material que compõe a barra.

Para obter a força interna no eixo da barra, a tensão de Cauchy é integrada na área da seção transversal do elemento:

$$f_{int,j}(\mathbf{u}_j) = \int_{a_j} \sigma_{b,j}(\mathbf{u}_j) da = \sigma_{b,j}(\mathbf{u}_j) a_j \quad (\text{D.6})$$

O vetor de forças interna da barra j é então obtido a partir da decomposição da força interna axial da barra nos eixos cartesianos:

$$\mathbf{f}_{int,j}(\mathbf{u}_j) = f_{int,j} \mathbf{R}_j = \sigma_{b,j}(\mathbf{u}_j) a_j \mathbf{R}_j \quad (\text{D.7})$$

É conveniente definir, também, a matriz de rigidez tangente do elemento. Esta é obtida a partir da derivada do vetor de forças internas do elemento, apresentado na equação (D.7), em relação ao vetor de deslocamentos associado ao elemento, $\mathbf{u}_j$:

$$\mathbf{k}_{t,j} = \frac{\partial \sigma_{b,j}(\mathbf{u}_j)}{\partial \mathbf{u}_j} a_j \mathbf{R}_j = \frac{\partial \sigma_{b,j}(\mathbf{u}_j)}{\partial \varepsilon_j(\mathbf{u}_j)} \frac{\partial \varepsilon_j(\mathbf{u}_j)}{\partial \mathbf{u}_j} a_j \mathbf{R}_j \quad (\text{D.8})$$

Definindo o módulo de elasticidade tangente como:

$$E_{T,j}(\mathbf{u}_j) = \frac{\partial \sigma_{b,j}(\mathbf{u}_j)}{\partial \varepsilon_j(\mathbf{u}_j)} \quad (\text{D.9})$$

E considerando a definição da deformação (D.3), a matriz de rigidez tangente da barra j é:

$$\mathbf{k}_{t,j} = \frac{a_j E_{T,j}(\mathbf{u}_j)}{L_j} \mathbf{R}_j^T \mathbf{R}_j \quad (\text{D.10})$$

D.1.1. Modelo constitutivo bilinear

O comportamento de um modelo uniaxial pode ser definido diretamente a partir da análise da tensão de Cauchy axial da barra. No caso de um material com comportamento bilinear, tem-se:

$$\sigma_b(\varepsilon) = E_T(\varepsilon) \varepsilon \quad (\text{D.11})$$

Sendo:

$$E_T(\varepsilon) = \begin{cases} E^+, & \varepsilon \geq 0 \\ E^-, & \varepsilon < 0 \end{cases} \quad (\text{D.12})$$

A energia de deformação específica do material é definida por:

$$\Psi_{b,0} = \frac{1}{2} \sigma_b \varepsilon = \frac{1}{2} E_T \varepsilon^2 \quad (\text{D.13})$$

D.1.2. Modelo constitutivo hiperelástico

Apresenta-se também a formulação utilizando um modelo constitutivo hiperelástico, o modelo de Ogden. Este, consiste em um modelo isotrópico descrito em termos dos alongamentos principais, λ_i , apresentado em (D.14).

$$\Psi_{b,0}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{j=1}^M \frac{\mu_j}{\alpha_j} \left(\lambda_1^{\alpha_j} + \lambda_2^{\alpha_j} + \lambda_3^{\alpha_j} - 3 \right) \quad (\text{D.14})$$

Onde, M , μ_j e α_j são parâmetros do material.

Conforme ressaltado por Ramos Jr. e Paulino (2015), o modelo de Ogden é interessante pois ele inclui outros modelos hiperelásticos, como o de Saint Venant, o Neo-Hookeano e o de Henky.

Para o elemento de barra, apenas o alongamento principal que ocorre na direção do eixo da barra (λ) é relevante, enquanto os demais são unitários. O valor de λ é obtido a partir da deformação axial, conforme:

$$\lambda = \varepsilon + 1 \quad (\text{D.15})$$

Consequentemente, a tensão normal no eixo da barra é obtida a partir da equação (D.5), fornecendo:

$$\sigma_b(\lambda) = \frac{\partial \Psi(\lambda)}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial \Psi(\lambda)}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial \Psi(\lambda)}{\partial \lambda} \quad (\text{D.16})$$

Simplificando o modelo de Ogden, apresentado na equação (D.14), para o elemento de barra temos (D.17). Esta, ao ser substituída em (D.16) fornece a expressão da tensão normal no eixo da barra para o modelo de Ogden.

$$\Psi_{b,0}(\lambda) = \sum_{j=1}^M \frac{\mu_j}{\alpha_j} (\lambda^{\alpha_j} - 1) \quad (\text{D.17})$$

$$\sigma_b(\lambda) = \sum_{j=1}^M \mu_j \lambda^{\alpha_j - 1} \quad (\text{D.18})$$

O módulo de elasticidade tangente é obtido de acordo com:

$$E_T(\lambda) = \frac{\partial \sigma_b(\lambda)}{\partial \lambda} = \sum_{j=1}^M \mu_j (\alpha_j - 1) \lambda^{\alpha_j - 2} \quad (\text{D.19})$$

É importante observar que o módulo de elasticidade é sempre positivo caso os parâmetros assumam valores de $\mu_j > 0$ e $\alpha_j > 1$ ou $\mu_j < 0$ e $\alpha_j < 1$. Como consequência disso, tem-se que a energia de deformação específica é estritamente convexa em função de λ , ou seja, ao se deformar a barra sempre irá apresentar ganho de rigidez.

Por fim, os parâmetros do modelo de Ogden devem respeitar a condição de estado de tensão nulo (D.20) e também ser consistente com a teoria linear (D.21).

$$\sigma_b(1) = 0 \rightarrow \sum_{j=1}^M \mu_j = 0 \quad (D.20)$$

$$E_T(1) = E_0 \rightarrow \sum_{j=1}^M \mu_j \alpha_j = 2G + \Lambda \cong E_0 \quad (D.21)$$

Sendo E_0 o módulo de elasticidade tangente inicial e G o módulo de elasticidade transversal. É importante lembrar que pela teoria da Elasticidade, tem-se as relações (D.22) e (D.23), sendo que para um modelo unidimensional o efeito do coeficiente de Poisson pode ser desprezado, o que justifica em (D.21) a aproximação pelo módulo de elasticidade tangente inicial.

$$G = \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (D.22)$$

$$\Lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (D.23)$$

Nos trabalhos de Ramos Jr. e Paulino (2015), Zhang, Paulino e Ramos Jr. (2017) e Zhang, Paulino e Ramos Jr. (2018), foi adotado o modelo de Ogden considerando $M = 2$ e $\mu_1 = -\mu_2$. Assim, as expressões para o módulo de elasticidade inicial, módulo de elasticidade tangente e tensão normal são:

$$E_0 = \mu_1 (\alpha_1 - \alpha_2) \quad (D.24)$$

$$E_T(\lambda) = \frac{E_0}{\alpha_1 - \alpha_2} \left[(\alpha_1 - 1) \lambda^{\alpha_1 - 2} - (\alpha_2 - 1) \lambda^{\alpha_2 - 2} \right] \quad (D.25)$$

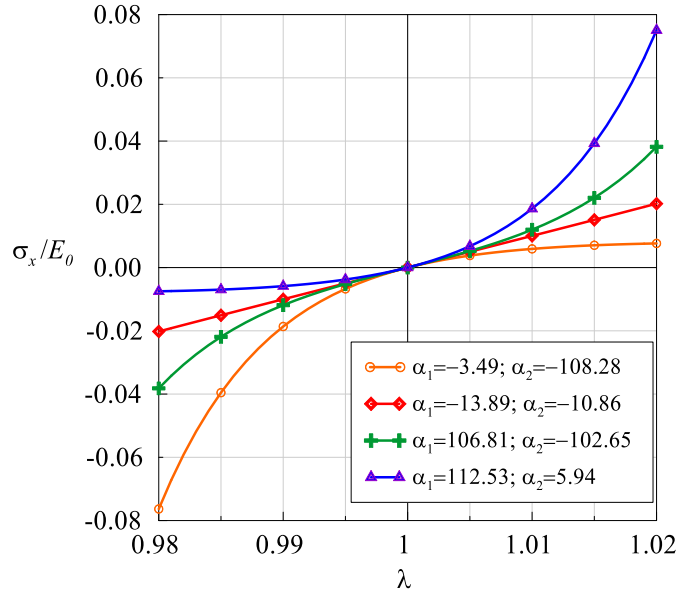
$$\sigma_x(\lambda) = \frac{E_0}{\alpha_1 - \alpha_2} (\lambda^{\alpha_1 - 1} - \lambda^{\alpha_2 - 1}) \quad (D.26)$$

Para determinar os valores de α_1 e α_2 , faz-se uso da equação (D.26) definindo tensões de referência à tração e à compressão, resultando em um sistema de equações não-lineares:

$$\begin{cases} \overline{\sigma}_t = \frac{\sigma_t}{\mu_1} = \lambda_t^{\alpha_1 - 1} - \lambda_t^{\alpha_2 - 1} \\ \overline{\sigma}_c = \frac{\sigma_c}{\mu_1} = \lambda_c^{\alpha_1 - 1} - \lambda_c^{\alpha_2 - 1} \end{cases} \quad (D.27)$$

Sendo que σ_t , σ_c , λ_t , λ_c , μ_1^0 são parâmetros especificados pelo usuário. A Figura D.2 apresenta o comportamento do modelo de material de Ogden utilizado neste trabalho para diferentes pares de valores de α_1 e α_2 .

Figura D.2 - Modelo de Ogden para diferentes valores de α_1 e α_2



Fonte: Adaptado de Zhang, Ramos Jr. e Paulino (2017)

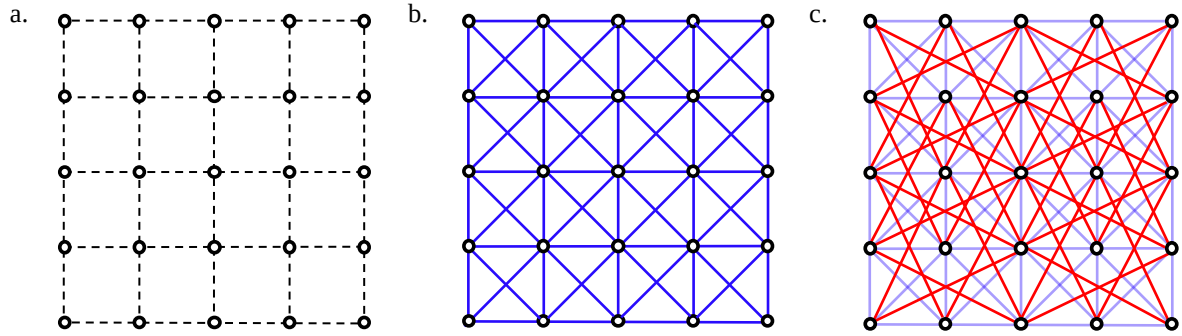
Observe na Figura D.2 que dentro de uma mesma faixa de valores de deformação é possível obter comportamentos onde se tem uma elevada rigidez à tração (curva azul), uma elevada rigidez à compressão (curva laranja) ou até mesmo um comportamento quase linear, como o da curva em vermelho.

D.2. MÉTODO DA *GROUND STRUCTURE*

O Método da *Ground Structure* em sua abordagem mais clássica consiste em, a partir de uma treliça hiper conectada, realizar um processo de otimização das áreas das barras, maximizando a rigidez da estrutura e respeitando uma restrição de volume. A topologia é então definida por um processo de corte, em que se elimina as barras finas que não contribuem significativamente para o valor da função objetivo.

A treliça hiper conectada, a *Ground Structure*, pode ser definida a partir de uma grade de nós, assim como a apresentada na Figura D.3.

Figura D.3 - Exemplos de estruturas-base com diferentes graus de conectividade: (a) Grade de nós usada para geração das barras; (b) Grau de conectividade 1; (c) Grau de conectividade 2



Utilizando uma mesma grade de nós, diferentes treliças podem ser obtidas em função do grau de conectividade adotado. Caso seja utilizado um grau de conectividade igual a 1, será obtida uma treliça em que se tem barras ligando os nós de um mesmo elemento. Caso o grau de conectividade seja 2, além das barras já presentes, tem-se a formação de barras ligando os nós de um elemento com os nós do elemento vizinho. Na Figura D.3 (b) apresenta a treliça obtida considerando um grau de conectividade 1 a partir da grade de nós da Figura D.3 (a), com as barras em cor azul. Na Figura D.3 (c), tem-se a treliça considerando o grau de conectividade igual a 2, com as barras em vermelho, sendo que as barras com conectividade 1 são apresentadas com um azul mais claro para facilitar a visualização.

Em relação à formulação do problema de otimização, a fim de considerar a não-linearidade física, Ramos Jr e Paulino (2015) utilizaram a formulação apresentada em (D.28), seguindo a formulação aninhada apresentada por Klarbring e Stromberg (2012).

$$\begin{aligned}
 &\text{Obter:} && \mathbf{a} \\
 &\text{Que minimiza:} && f(\mathbf{a}, \mathbf{U}(\mathbf{a})) = -\Pi_{\min}(\mathbf{a}, \mathbf{U}(\mathbf{a})) \\
 &\text{Tal que:} && g(\mathbf{a}) = \mathbf{L}^T \mathbf{a} - V_{\max} \leq 0 \\
 &&& 0 < a_{\min} \leq a_i \leq a_{\max} \\
 &\text{Com:} && \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{a}, \mathbf{U}(\mathbf{a})) = \mathbf{F}_{\text{ext}}
 \end{aligned} \tag{D.28}$$

Onde, $\mathbf{a}$ é o vetor com as áreas das barras; $\mathbf{L}$ é o vetor com os comprimentos das barras; $a_{\min}$ é o limite inferior das variáveis de projeto; $a_{\max}$ é o limite superior das variáveis de projeto; $\mathbf{U}$ é o vetor de deslocamentos nodais da estrutura; $\mathbf{F}_{\text{int}}$ é o vetor de forças internas nodais da estrutura, calculado a partir da equação (D.29); e $\mathbf{F}_{\text{ext}}$ é o vetor de forças externas nodais.

$$\mathbf{F}_{int}(\mathbf{a}, \mathbf{U}(\mathbf{a})) = \sum_{j=1}^{N_b} \mathbf{f}_{int,j}(a_j, \mathbf{u}_j) \quad (\text{D.29})$$

Sendo o somatório em (D.29) uma representação do processo de montagem do vetor de forças internas nodais da estrutura a partir da contribuição do vetor de forças internas de cada barra.

A função objetivo é a energia potencial total estacionária:

$$\Pi_{min}(\mathbf{a}, \mathbf{U}(\mathbf{a})) = \sum_{j=1}^{N_b} a_j L_j \Psi_{b,0}(\mathbf{u}_j) - \mathbf{F}_{ext} \cdot \mathbf{U}(\mathbf{a}) \quad (\text{D.30})$$

A sensibilidade da função objetivo é:

$$\frac{\partial f(\mathbf{a}, \mathbf{U}(\mathbf{a}))}{\partial a_j} = - \frac{\partial \Pi_{min}(\mathbf{a}, \mathbf{U}(\mathbf{a}))}{\partial a_j} - \frac{\partial \Pi_{min}(\mathbf{a}, \mathbf{U}(\mathbf{a}))}{\partial \mathbf{U}(\mathbf{a})} \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{a})}{\partial a_j} \quad (\text{D.31})$$

Como a derivada da energia potencial estacionaria em relação ao vetor de deslocamentos é nula, devido a condição de equilíbrio, tem-se:

$$\frac{\partial f(\mathbf{a}, \mathbf{U}(\mathbf{a}))}{\partial a_j} = - \frac{\partial \Pi_{min}(\mathbf{a}, \mathbf{U}(\mathbf{a}))}{\partial a_j} = -L_j \Psi_{b,0}(\mathbf{u}_j) \quad (\text{D.32})$$

A sensibilidade da restrição de volume é:

$$\frac{\partial g(\mathbf{a})}{\partial a_j} = L_j \quad (\text{D.33})$$

Como a sensibilidade da função objetivo é estritamente não-positiva e a sensibilidade da restrição de volume é estritamente positiva, é possível adotar o OC como esquema de atualização das variáveis de projeto.

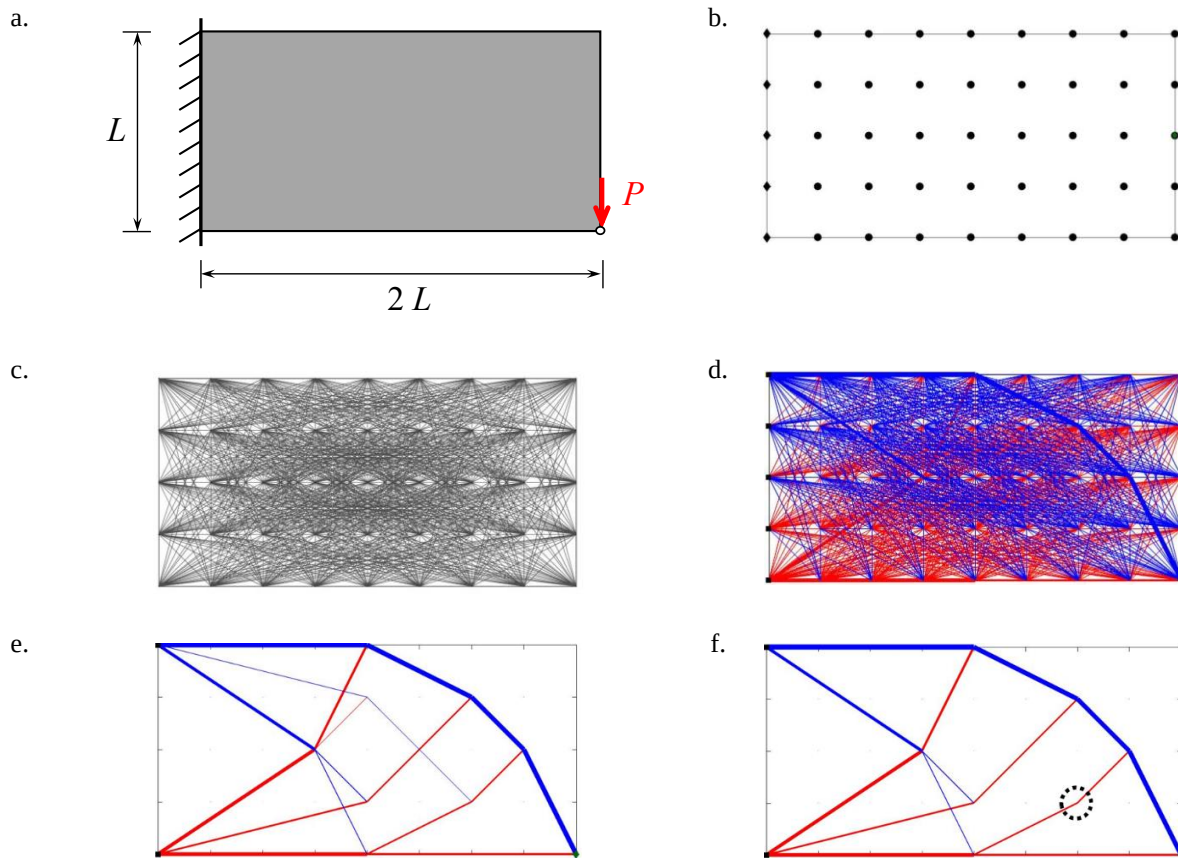
O problema de otimização apresentado em (D.28) fornece como solução a distribuição otimizada das áreas das barras da treliça hiper conectada. Para definição da topologia utilizando esta abordagem, é preciso definir um processo de filtragem que elimine as barras mais finas que não contribuem de forma significativa para o valor da função objetivo. Esse processo de filtragem utilizado é apresentado em (D.34).

$$Filtro(\mathbf{a}, \alpha_f) = \begin{cases} 0, & \frac{a_i}{\max(\mathbf{a})} < \alpha_f < 1 \\ a_i, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (D.34)$$

Portanto, o filtro atua com base num parâmetro de corte α_f , que varia de 0 a 1, sobre as áreas normalizadas das barras.

Como forma de ilustrar o processo de filtragem, a Figura D.4 apresenta uma viga engastada com uma carga pontual aplicada no canto inferior da extremidade livre. A dimensão L é igual a 4 m e a carga P é igual a 100 kN. Foi adotada uma estrutura base gerada a partir de uma grade de nós de 5 x 9, com grau de conectividade máximo, indicada na Figura D.4 (c). Foi considerado um material com comportamento elástico linear com módulo de elasticidade igual a 70 GPa. É possível identificar a presença de uma grande quantidade de barras com áreas baixas na solução do processo de otimização de dimensões na Figura D.4 (d), logo foi aplicado um corte dessas barras finas. As Figura D.4 (e) e (f) apresentam as topologias obtidas para dois valores de corte distintos, de 0,05 e 0,10, respectivamente.

Figura D.4 - Exemplo método de *Ground Structure*: (a) Domínio de projeto; (b) Grade de nós; (c) Estrutura base; (d) Solução da otimização de dimensões; (e) Topologia extraída com α_f igual a 0,05; (f) Topologia extraída com α_f igual a 0,10



É possível identificar na solução topológica obtida com a aplicação de um parâmetro de corte de 0,10 que foi eliminado um número excessivo de barras finas, inclusive barras que eram necessárias para garantir o equilíbrio da estrutura. Na Figura D.4 (f) se tem a indicação de um nó que se torna instável após a aplicação do filtro.

APÊNDICE E

GERAÇÃO DA MALHA DE ELEMENTOS POLIGONAIS UTILIZANDO O POLYMESHER

Neste trabalho foi utilizado para a geração das malhas de elementos finitos o código denominado `PolyMesher` apresentado no trabalho de Talischi *et al.* (2012b). Este apêndice tem, então, o intuito de apresentar uma breve descrição da geração da malha fazendo uso do código.

E.1. DISCRETIZAÇÃO DO DOMÍNIO UTILIZANDO DIAGRAMAS DE VORONOI

Dado um conjunto de n pontos distintos $\mathbf{P}$ localizados no interior de um domínio convexo Ω , denominados sementes, a partição do domínio Ω é definida por:

$$\mathcal{T}(\mathbf{P}, \Omega) = \{V_y \cap \Omega : y \in \mathbf{P}\} \quad (\text{E.1})$$

Onde V_y é a célula de Voronoi associada ao ponto y :

$$V_y = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|, \forall \mathbf{z} \in \mathbf{P} \setminus \{y\}\} \quad (\text{E.2})$$

Portanto, a célula de Voronoi associada ao ponto y corresponde ao conjunto de pontos do plano que são mais próximos de y do que quaisquer outros pontos em $\mathbf{P}$.

A geração de malhas de elementos finitos poligonais com o `PolyMesher` faz uso de uma classe de diagramas de Voronoi denominados *Centroidal Voronoi Tessellation* (CVT), em que a posição da semente y coincide com o centroide y_c da região associada à semente:

$$y_c = \frac{\int_{V_y \cap \Omega} \mathbf{x} \mu(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}{\int_{V_y \cap \Omega} \mu(\mathbf{x}) d\mathbf{x}} \quad (\text{E.3})$$

Sendo $\mu(\mathbf{x})$ uma função de densidade definida no domínio Ω . Para geração de malhas uniformes, considera-se $\mu(\mathbf{x}) = 1$.

Outra forma de se caracterizar um diagrama de Voronoi CVT é a partir do funcional de energia baseado no desvio de cada região de Voronoi até sua semente geradora:

$$\mathcal{E}(\mathbf{P}; \Omega) = \sum_{\mathbf{y} \in \mathbf{P}} \int_{V_{\mathbf{y}}(\mathbf{P}) \cap \Omega} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 d\mathbf{x} \quad (\text{E.4})$$

Conforme será discutido no item a seguir, é definido como critério de parada a condição de estacionariedade do funcional (E.7). Para isso, faz-se necessário definir seu gradiente, o qual é dado por:

$$\nabla_{\mathbf{y}} \mathcal{E} = 2(\mathbf{y} - \mathbf{y}_c) |V_{\mathbf{y}}| \quad (\text{E.5})$$

E.2. ALGORITMO DE LLOYD

O algoritmo de Lloyd é um método para obter malhas CVT em que, de forma iterativa, se atualiza a posição das sementes pelos centroides das células de Voronoi das regiões correspondentes. Essa atualização pode ser definida por meio do operador:

$$\mathbf{L}_{\mathbf{y}}(\mathbf{P}) = \frac{\int_{V_{\mathbf{y}}(\mathbf{P}) \cap \Omega} \mathbf{x} \mu(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}{\int_{V_{\mathbf{y}}(\mathbf{P}) \cap \Omega} \mu(\mathbf{x}) d\mathbf{x}} \quad (\text{E.6})$$

Assim, o processo de atualização é dado por:

$$\mathbf{P}_{k+1} = \mathbf{L}_{\mathbf{y}}(\mathbf{P}_k) \quad (\text{E.7})$$

O critério de convergência é baseado na norma do gradiente do funcional definido na equação (E.7):

$$\|\nabla \mathcal{E}\| \approx 0 \quad (\text{E.8})$$

Sendo:

$$\|\nabla \mathcal{E}\| = \left(\sum_{\mathbf{y} \in \mathbf{P}} \|\nabla_{\mathbf{y}} \mathcal{E}\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{\mathbf{y} \in \mathbf{P}} |V_{\mathbf{y}}|^2 \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_c\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{E.9})$$

Uma vez que os seguintes escalares são diretamente proporcionais:

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{y}_c\|^2 \propto |V_{\mathbf{y}}| \propto \frac{|\Omega|}{n} \quad (\text{E.10})$$

Tem-se que o gradiente é então diretamente proporcional a:

$$\|\nabla \mathcal{E}\| \propto \left(\sum_{\mathbf{y} \in \mathbf{P}} \frac{|\Omega|^2}{n^2} \frac{|\Omega|}{n} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(n \frac{|\Omega|^2}{n^2} \frac{|\Omega|}{n} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{|\Omega|^{\frac{3}{2}}}{n} \quad (\text{E.11})$$

Por fim, Talischi *et al.* (2012b) definiram um parâmetro de erro adimensional, apresentado em (E.12), para avaliar a convergência do algoritmo de Lloyd.

$$E_r = \frac{n}{|\Omega|^{\frac{3}{2}}} \|\nabla \mathcal{E}\| = \frac{n}{|\Omega|^{\frac{3}{2}}} \left(\sum_{\mathbf{y} \in \mathbf{P}} |V_{\mathbf{y}}|^2 \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_c\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{E.12})$$

E.3. DEFINIÇÃO DE PONTOS FIXOS NO DOMÍNIO

O trabalho de Pereira *et al.* (2016) fez uma adição ao PolyMesher para permitir a especificação de pontos fixos no domínio definidos pelo usuário. A função adicionada faz uso da propriedade do diagrama de Voronoi que uma circunferência que passa por três ou mais pontos define um vértice.